Analiza II, kolokwium wiosenne 3 kwietnia 2009

14:03 — 16:09

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

0. Sformułować twierdzenie Lebesgue'a – Levi'ego o monotonicznym przechodzeniu do granicy i twierdzenie Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.

---

1. Niech $f(x) = \frac{5}{12}\big(x - 5|x-2| + 10\big)$ dla $x \in [0,5]$.

Wskazać taki zbiór mierzalny $A \subseteq [0,5]$, że $l_1\big(f(A)\big) \neq l_1(A)$; przypominam, że $f(A) = \{f(x)\colon \quad x \in A\}$.

Wykazać, że jeżeli zbiór $B \subseteq [0,5]$ jest mierzalny, to jego przeciwobraz, czyli zbiór $f^{-1}(B) = \{x \in [0,5]\colon \quad f(x) \in B\}$ też jest mierzalny i $l_1(B) = l_1\big(f^{-1}(B)\big)$.

---

2. Niech $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \quad x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 3(x^2+y^2),\ 0 \leq z \leq 2\}$. Obliczyć całkę

$$\int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dl_1(x,y,z)\,.$$

---

3. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad \max(-2x, x-1) < y < \min(1-2x, x+1)\}$. Obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \left(\tfrac{2x+y+n}{n}\right)^n dl_2(x,y)\,.$$

---

4. Niech $A \subset (0,\infty)$ będzie takim zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, że $\int_A x\, dl_1(x) = 7$ i niech $0 < a < b$, $a,b \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy $f(x) = l_1\big(A \cap [ax, bx]\big)$. Obliczyć $\int_0^\infty f(x)\, dl_1(x)$.
