Analiza II, egzamin, 31 stycznia 2009

9:10 — 13:10

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Zdefiniujmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorami: $f(x,y) = (x+y)^2 \sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, gdy $xy \neq 0$ oraz $f(x,y) = 0$, gdy $xy = 0$. Znaleźć wszystkie punkty $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, w których funkcja f jest ciągła oraz wszystkie te punkty $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, w których jest ona różniczkowalna.

---

2. Udowodnić, że równanie $w^3 - 2xw + y = 0$ wyznacza w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, w_0) = (1,1,1)$ zmienną w jako funkcję klasy C^∞ zmiennych x i y.
Znaleźć drugi wielomian Taylora funkcji $w = w(x,y)$ w punkcie $(1,1)$.

---

3. Niech $K = \{(x,y,z)\colon \quad x+y+z \leq 4,\ xyz \geq 2,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$. Obliczyć kres dolny i górny odległości punktu $(0,0,0)$ od punktów zbioru K.

---

4. Wyznaczyć wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x.y) = (\cos x - y)(y-1)$. Dla każdego z nich wyjaśnić, czy funkcja ma w tym punkcie lokalne ekstremum, a jeśli ma , to jakie.

---

5. Niech $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad x^3 - 12xy + 8y^3 = 0\}$.
(a) Wykazać, że M **nie** jest rozmaitością (zanurzoną w $\mathbb{R}^2$).
(b) Znaleźć punkty, po usunięciu których ze zbioru M, stanie się on rozmaitością.
(c) Znaleźć przestrzeń $T_{(3,\frac{3}{2})}M$ styczną do zbioru M w punkcie $(3,\frac{3}{2})$.
(d*) Znaleźć przestrzeń $T_{(0,0)}M$ styczną do zbioru M w punkcie $(0,0)$ — ten punkt nie jest obowiązkowy, ale osoby, które znajdą tę przestrzeń styczną, będą mile witane na egzaminie ustnym.
