# Analiza II, kolokwium drugie, 19 grudnia 2008

*Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.*

*Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

**0.** Sformułować twierdzenie Peano o wzorze Taylora dla funkcji $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $C^2$.
Napisać drugi wielomian Taylora dla funkcji $f$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x,y) = \cos(x+y) - \sin(xy)\,.$$

**1.** Znaleźć takie liczby $x, y \in \mathbb{R}$, że czworościan o wierzchołkach $C = (0,0,0)$, $A = (4,0,0)$, $B = (0,3,0)$ i $D = (x, y, 19122008)$ ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej ze wszystkich czworościanów o podstawie $ABC$ i wysokości $19122008$ lub wykazać, że taki czworościan nie istnieje.

**2.** Niech $U = \{(x,y)\colon \quad \max(y, x+y) > 0\}$. Znaleźć dyfeomorfizm $f\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{na} U$.

**3.** Pokazać, że w otoczeniu punktu $(1,1)$ równanie

$$x^3 + y^2 - 2xy = 0$$

może być jednoznacznie rozwiązane ze względu na $x$ i że otrzymana funkcja $x = \varphi(y)$ jest klasy $C^1$ w otoczeniu $y = 1$.
Obliczyć $\varphi'(1)$.
Czy równanie może być jednoznacznie rozwiązane ze względu na zmienną $y$ w otoczeniu punktu $(1,1)$?

**4.** Niech $L$ oznacza prostą, która przechodzi przez punkty $(1,0,0)$ i $(2,1,1)$. Przez każdy punkt prostej $L$ prowadzimy prostą przecinającą oś $OZ := \{(0,0,z)\colon \quad z \in \mathbb{R}\}$ pod kątem prostym. Niech $M$ będzie sumą wszystkich tych prostych.
Napisać równanie zbioru $M$.
Sprawdzić, czy zbiór $M$ jest rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^3$.
Podać równanie płaszczyzny stycznej do zbioru $M$ przechodzącej przez punkt $(2,1,1)$.