Analiza II, kolokwium pierwsze, 7 listopada 2008

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

0. Podać definicję wektora stycznego do zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Znaleźć zbiór wszystkich wektorów stycznych do zbioru $A = \{(x,y)\colon \quad (x^2-y^2)\big((x-1)^2+y^2-1\big)=0\}$ w punkcie $(0,0)$.

---

1. Niech $L(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, gdzie $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i niech B oznacza sumę wszystkich sześciu ścian sześcianu jednostkowego $[0,1]^3$.

Dowieść, że wśród czworościanów, których wszystkie wierzchołki znajdują się w zbiorze

$$A = L^{-1}(B)$$

znajduje się czworościan o największej objętości.

---

2. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|yx^{-2}\right| \cdot e^{-\left|yx^{-2}\right|} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

---

3. Wyznaczyć wszystkie punkty płaszczyzny, w których funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \left|e^x - y\right| \cdot \left(e^x - 1\right)$$

jest różniczkowalna.

---

4. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Dla każdego punktu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ spełniona jest nierówność $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$. Dla każdej liczby rzeczywistej z zachodzi nierówność $f(0,0,z) \geq 0$.

Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $u \geq 0$ i z spełniona jest nierówność $f(u,u,z) \geq 0$.

REZERWA

0. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek:

dla każdych punktów $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^k$ i dowolnych liczb $\alpha, \beta \geq 0$ z tego, że $\alpha + \beta = 1$, wynika $f(\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q}) \leq \alpha f(\mathbf{p}) + \beta f(\mathbf{q})$.

Zaproponować nazwę dla funkcji, które spełniają podany warunek.

Udowodnić, że funkcja f jest ciągła.

Rozstrzygnąć, czy funkcja f jest jednostajnie ciągła.

1. Zbadać ciągłość, istnienie pochodnych cząstkowych, istnienie pochodnych kierunkowych oraz istnienie różniczki dla funkcji f zdefiniowanej w następujący sposób:

(A) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$

Czy pochodne cząstkowe funkcji są ciągłe w punkcie $(0,0)$?

2. Niech

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

Rozstrzygnąć czy dla każdego zbioru otwartego $G \subseteq \mathbb{R}^2$ zbiór $f(G)$ jest otwarty w $\mathbb{R}$.

Rozstrzygnąć, czy jest prawdą, że jeśli $p \in A \cap B$, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}A$, $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}B$, to kąt między wektorami $Df(\mathbf{p})\mathbf{v}$ i $Df(\mathbf{q})\mathbf{w}$ równy jest kątowi między wektorami $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$.

3. Niech $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru

$$\{(x,y) \in R^2\colon \quad y = x^2 \neq 0\}.$$

(a) Pokazać, że h ma w $(0,0)$ wszystkie pochodne kierunkowe, ale nie jest ciągła w tym punkcie.

(b) Definiujemy $k\colon R^2 \longrightarrow R$ następująco $k(x,y) = xh(x,y)$. Pokazać, że k posiada w $(0,0)$ wszystkie pochodne kierunkowe i jest w tym punkcie ciągła, ale nie jest w $(0,0)$ różniczkowalna.