Analiza II_2, egzamin poprawkowy, 3 września 2007

9:00 — 12:30

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $M \subset \mathbb{R}^k$ będzie rozmaitością wymiaru $m < k$. Wykazać, że $\ell_k(M) = 0$.

---

2. Obliczyć $\int_M x\,d\ell_M$, $\int_M y\,d\ell_M$ i $\int_M z\,d\ell_M$, gdzie M jest częścią powierzchni stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$ zawartą w walcu $x^2+y^2+2x \le 0$. Znaleźć środek ciężkości M zakładając jest, że gęstość masy równa jest 1 we wszystkich punktach M.

---

3. Niech C oznacza brzeg obszaru $D = \{(x,y)\colon \quad 0 < y < x\ln\frac{1}{x}\}$. Obliczyć $\int_C (x+y)\,dx - x\,dy$.

---

4. Powierzchnia $M = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2+z^2 = \sqrt{z} > 0\}$ jest zorientowana tak, że ujemna strona jest widoczna, a dodatnia niewidoczna z punktu $(0,0,\frac{1}{2})$. Obliczyć strumień pola wektorowego $[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \sqrt{z}]$ przez powierzchnię M ze strony ujemnej na dodatnią, czyli $\int_M \left[\frac{x}{z}\,dy\wedge dz + \frac{y}{z}\,dz\wedge dx + \sqrt{z}\,dx\wedge dy\right]$. Czy zbiór $M \cup \{(0,0,0)\}$ jest rozmaitością?

---

5. Niech T oznacza torus powstały w wyniku obrotu okręgu o promieniu 7 i środku $(13,0,0)$ leżącego w płaszczyźnie o równaniu $y=0$ wokół osi OZ. Torus jest zorientowany tak, że dodatnia strona jest widoczna z zewnątrz. Znaleźć $\int_T (x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dy + z\,dx\wedge dy)$.
