Analiza II_2, egzamin, 20 czerwca 2007

9:00 — 12:30

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\int_a^b\frac{f(y)}{1+n^2(x-y)^2}dy=f(x)$$

oraz że zbieżność jest niemal jednostajna na (a,b).

---

2. Każdy punkt elipsy $\{(x,y,z):\quad x^2+y^2=1,\quad x+z=1\}$ został połączony odcinkiem z punktem $\mathbf{0}=(0,0,0)$. Rozmaitość M jest sumą tych odcinków (bez końców). Obliczyć $\int_M\sqrt{x+3z}\,d\ell_m$.

---

3. Sfera $x^2+y^2+z^2=9$ w przecięciu z płaszczyzną $x+y+z=3$ tworzy okrąg. Niech γ będzie krzywą opisującą łuk tego okręgu o początku $(2,2,-1)$ i końcu (0,3,0), zawarty w półprzestrzeni $\{(x,y,z):\quad y>0\}$. Obliczyć $\int_\gamma\frac{yz\,dx-zx\,dy+xy\,dz}{y^2}$.

---

4. Obliczyć $\int_M\big[(1+\sin x)\,dy\wedge dz-y\cos x\,dx\wedge dz\big]$.
$M=\{(x,y,z):\quad y^2+z^2=(1-\sin x)^2,\ \ 0\le x\le\frac{\pi}{4}\}$, M jest zorientowana „na zewnątrz”, tzn. dodatnio jako fragment brzegu obszaru $\{(x,y,z):\quad y^2+z^2<(1-\sin x)^2,\ \ 0<x<\frac{\pi}{4}\}$.

---

5. Dane są zbiory mierzalne $A,B\subseteq[0,1]$. Określamy $f(x)=\ell_1\big(A\cap[0,x]\big)$, $g(x)=\ell_1\big(B\cap[0,x]\big)$.
Obliczyć $\int_B f\,d\ell_1+\int_A g\,d\ell_1$.

Niech $M=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:(x-\frac12)^2+y^2<\frac12,\ (x+\frac12)^2+y^2<1,\ z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}\}$.

6. Niech $S^1(a,r)$ oznacza okrąg w $\mathbf{R}^2$ o środku w $a\in\mathbf{R}^2$ i promieniu r, $\|x\|$ oznacza długość wektora $x\in\mathbf{R}^2$ wyznaczoną przez normę standartową i niech $a,b\in\mathbf{R}^2$. Obliczyć

$$\lim_{r\to\infty}\Big(\int_{S^1(a,r)}\|x\|^2dl_1(x)-\int_{S^1(b,r)}\|x\|^2dl_1(x)\Big).$$

Wskazówka:

1. Zastosuj twierdzenie o regularyzacji dla funkcji całkowalnych.

2. $\int_{(a,b)}hdx=\int_{\mathbf{R}}h\chi_{(a,b)}dx$, *gdzie* $\chi_{(a,b)}$ *jest funkcją charakterystyczn***c***a zbioru* (a,b).

7. Obliczyć $\int_M z\,d\ell_M$, Gdzie M jest częścią powierzchni stożka $z=\sqrt{x^2+y^2}$ zawartą w walcu $x^2+y^2+2x\le 0$.

8. Powierzchnia $M = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2+z^2 = \sqrt{z} > 0\}$ jest zorientowana tak, że ujemna strona jest widoczna, a dodatnia niewidoczna z punktu $(0,0,\frac{1}{2})$. Obliczyć strumień pola wektorowego $[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \sqrt{z}]$ przez powierzchnię M ze strony ujemnej na dodatnią, czyli $\int_M \left[\frac{x}{z}\,dy\wedge dz + \frac{y}{z}\,dz\wedge dx + \sqrt{z}\,dx\wedge dy\right]$. Czy zbiór $M \cup \{(0,0,0)\}$ jest rozmaitością?

9. Niech C oznacza brzeg obszaru $D = \{(x,y)\colon \quad 0 < y < x\ln\frac{1}{x}\}$. Obliczyć $\int_C (x+y)\,dx - x\,dy$.
