Analiza II_2, kolokwium, 22 kwietnia 2007

18:00 — 20:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech A będzie dodatnio określoną macierzą symetryczną wymiaru 3, λ_1, λ_2, λ_3 — jej wartościami własnymi. Znaleźć $\ell_3\big(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon \quad A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \le 1\}\big)$.

---

2. Niech A będzie dodatnio określoną macierzą symetryczną wymiaru k, λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — jej wartościami własnymi. Niech $f(\mathbf{x}) = e^{-A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$. Obliczyć $\int_{\mathbb{R}^k} f\,d\ell_k$.

---

3. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n e^{-4x-22y}\,d\ell_2$, $A = \big\{(x,y)\colon \quad x > 0 \text{ i } y > 0\big\}$.

---

4. Znaleźć pole powierzchni tej części sfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $r > 0$, która jest zawarta między płaszczyznami $x = a$ i $x = b$, $-r \le a < b \le r$.

---

5. Niech $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Definiujemy wtedy funkcje $C(h)$ i $S(h)$ za pomocą wzorów: $C(h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos(tx)\,dt$ i $S(h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin(tx)\,dt$.

Udowodnić, że funkcja $C(h)$ jest ciągła oraz, że $\lim\limits_{x\to\pm\infty} C(h)(x) = 0$.

Udowodnić, że jeśli f i g są funkcjami całkowalnymi, to dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

$$C(f * g)(x) = C(f)(x)C(g)(x) - S(f)(x)S(g)(x).$$
