# Analiza II$_2$, kolokwium, 17 kwietnia 2007

**12:06 — 14:06**

*Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.*

*Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.*

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

**1.** Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y = e^x$, $y = \frac{1}{5}x$, $x + y = 1$, $x = 4$.

---

**2.** Niech $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k) \in \mathbb{R}^k$ będzie ustalonym wektorem. Niech $f(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}}$ i niech $A = \underbrace{[0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty) \times \ldots \times [0,\infty)}_{k \text{ czynników}}$. Obliczyć $\int_A f\, d\ell_k$.

---

**3.** Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \iiint_W \frac{e^{-z}(x+y)^{n+1}}{1+(x+y)^n}\, dx\, dy\, dz$, jeśli $W = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2 < x+y,\ z > 0\}$

---

**4.** Niech $M = \{(x,y,z)\colon \quad 4x^2+4y^2+z^2 = 4,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Wykazać, że $M$ jest rozmaitością. Wskazać jakikolwiek atlas. Obliczyć $\int_M xyz\, d\ell_M$.

---

**5.** Niech $h\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Definiujemy wtedy funkcję $\mathcal{L}(h)$ za pomocą wzoru: $\mathcal{L}(h)(x) = \int_0^\infty h(t)e^{-tx}\, dt$. Udowodnić, że jeśli funkcje $f,g\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne, to funkcja $f*g\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\, dt$ też jest całkowalna i dla każdego $x \geq 0$ zachodzi równość $\mathcal{L}(f*g)(x) = \mathcal{L}(f)(x)\cdot\mathcal{L}(g)(x)$.

---