Analiza II_1, egzamin, 10 marca 2007, wykład M.K.

17:00 — 20:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $M = \{(x,y)\colon \quad x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 10x^2 - 6y^2 = -9\}$.
Wyjaśnić, czy M jest rozmaitością włożoną w $\mathbb{R}^2$. Jeśli nie, to znaleźć najmniejszy taki zbiór A, że zbiór $M \setminus A$ jest rozmaitością włożoną w płaszczyznę.
Znaleźć $T_{\mathbf{p}}M$, gdy $\mathbf{p} = (3,0)$ i gdy $\mathbf{p} = (0,\sqrt{3})$.

---

2. Niech $M = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2+z^2 = 9 \quad \text{oraz} \quad x+y+z = 3\}$, $f(x,y,z) = xz + yz$.
Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze M.

---

3. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln[\cos(x+y)]}{x^2+\sin^2 y}, & \text{jeśli } 0 < x^2+y^2 < 1; \\ -\frac{1}{2}, & \text{jeśli } 0 = x = y. \end{cases}$$

Wyjaśnić, czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0} = (0,0)$.
Jeśli jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0} = (0,0)$, znaleźć $Df(0,0)$.
Ile razy jest różniczkowalna funkcja f w punktach koła $\{(x,y)\colon \quad x^2+y^2 < 1\}$.

4.a Niech $f_a(y) = ay + e^y$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ przekształcenie f_a jest dyfeomorfizmem prostej na siebie, dla jakich $a \in \mathbb{R}$ przekształcenie f_a jest dyfeomorfizmem prostej na otwarty podzbiór właściwy prostej, dla jakich $a \in \mathbb{R}$ przekształcenie f_a nie jest dyfeomorfizmem?

4.b Znaleźć dyfeomorfizm $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow U$, jeśli $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad x^2 = 1 \Longrightarrow y < 0\}$

---

5. Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb algebraicznych, tzn. A składa się ze wszystkich pierwiastków wielomianów o współczynnikach całkowitych. Niech

$$A_k = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_k)\colon \quad x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } i = 1,2,\ldots k \text{ oraz } x_j \in A \text{ dla co najmniej jednego } j \in \{1,\ldots,k\}\big\}.$$

Dowieść, że $\overline{A_k} = \mathbb{R}^k$, $\operatorname{int} A_k = \emptyset$ oraz że jeśli $k > 1$, to A_k jest zbiorem spójnym.
Wykazać, że A_k jest zbiorem mierzalnym i znaleźć jego miarę Lebesgue'a.
