Analiza II_1, egzamin, 6 lutego 2007

13:00 — 16:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $f\colon\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie ściśle wypukłą funkcją klasy C^1. W obszarze $\Gamma_+ := \{(x,y,z):\quad z > f(x,y)\}$ prędkość światła jest równa c_1, a w obszarze $\Gamma_- := \{(x,y,z):\quad z < f(x,y)\}$ wynosi c_2. Promień światła wypuszczony z punktu $\mathbf{P} \in \Gamma_+$ przeszedł przez punkt $\mathbf{Q} \in \Gamma_-$ przecinając wykres $\Gamma := \{(x,y,z):\quad z = f(x,y)\}$ w takim punkcie $\mathbf{R} = \big(\mathbf{r}, f(\mathbf{r})\big)$, że czas potrzebny na przebycie drogi $\mathbf{PRQ}$ nie przekracza czasu potrzebnego na przebycie drogi $\mathbf{PXQ}$ niezależnie od wyboru punktu $\mathbf{X} \in \Gamma$. Niech $\mathbf{n}$ oznacza dowolny niezerowy wektory prostopadły do płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\mathbf{R}$. Niech $\varphi, \psi \in [0,\pi]$ oznaczają kąty między wektorem $\mathbf{n}$ oraz wektorami $\overrightarrow{\mathbf{PR}}$ i $\overrightarrow{\mathbf{QR}}$.

Wykazać, że wektory $\overrightarrow{\mathbf{PR}}$, $\overrightarrow{\mathbf{QR}}$ i $\mathbf{n}$ leżą w jednej płaszczyźnie i że $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{c_1}{c_2}$.

---

2. Niech $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$.

Wykazać, że istnieje taka liczba $\delta \in (0,1)$, że jeśli $|x-1| < \delta$ i $|y-1| < \delta$, to istnieje dokładnie jedna liczba $z > 0$, dla której spełniona jest równość $f(x,y,z) = 3e$.

Dowieść, że przyporządkowanie liczby $z > 0$ parze liczb x, y jest funkcją klasy C^∞.

Znaleźć $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.

---

3. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln[\cos(xy)]}{x\sin^2 y}, & \text{jeśli } 0 < |x|, |y| < 1; \\ -\frac{x}{2}, & \text{jeśli } |x|, |y| < 1 \text{ i } xy = 0. \end{cases}$$

Wyjaśnić, czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0} = (0,0)$.

Jeśli jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0} = (0,0)$, znaleźć $Df(0,0)$.

Jaka jest klasa różniczkowalności funkcji f w zbiorze $(-1,1) \times (-1,1)$.

---

4. Niech $f\colon\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ będzie takim odwzorowaniem klasy C^r, $r \geq 1$, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność $\|Df(\mathbf{x})\| \leq \frac{2}{3}$. Niech $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + f(\mathbf{x})$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

Dowieść, że odwzorowanie $g\colon\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest dyfeomorfizmem klasy C^r, który przekształca przestrzeń $\mathbb{R}^k$ **na** siebie.

---

5. Niech A będzie zbiorem złożonym z tych liczb $x \in [0,1]$, dla których istnieje taki ciąg (c_n), że $c_n \in \{0,1\}$ oraz $c_n \cdot c_{n+1} \cdot c_{n+2} = 0$ dla $n = 1,2,3,\ldots$ oraz $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 2^{-n}$.

Wykazać, że A jest zbiorem mierzalnym i znaleźć jego miarę Lebesgue'a.

Informacja: *liczby $c_1, c_2, \ldots$ to cyfry liczby x zapisanej w układzie dwójkowym.*
