Analiza II_1, klasówka, 16 stycznia 2007, rozwiązania

0. Podać definicję przeliczalnie addytywnego ciała zbiorów i definicję miary.

Niepustą rodzinę $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ nazywamy przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) z tego, że $A \in \mathcal{F}$ wynika, że $X \setminus A \in \mathcal{F}$ oraz

(ii) z tego, że $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ wynika, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Z tego, że $A \in \mathcal{F}$ *wynika, że* $X \setminus A \in \mathcal{F}$, *a stąd, że* $X = (X \setminus A) \cup A \cup A \cup \ldots \in \mathcal{F}$, *więc również* $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{F}$. ■

Funkcja $\mu: \mathcal{F}$ jest miarą wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\emptyset) = 0$ i jeśli zbiory $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 \in \mathcal{F}$, ... są parami rozłączne, to $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mu(A_1) + \mu_2(A_2) + \cdots$ ■

Sformułować warunek i twierdzenie Carathéodory'go.

Warunek: mówimy, ż dla zbioru $A \subseteq X$ spełniony jest warunek Carathéodory'go wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $Z \in X$ zachodzi równość $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$, μ^* oznacza tu dowolną miarę zewnętrzną (określoną na rodzinie 2^X wszystkich podzbiorów przestrzeni X).

Twierdzenie: rodzina zbiorów spełniających warunek Carathéodory'go jest przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów, miara zewnętrzna μ^* ograniczona do tej rodziny jest miarą. ■

Zdefiniować zbiory borelowskie.

Są to elementy najmniejszego przeliczanie addytywnego ciała zbiorów, które zawiera wszystkie zbiory otwartej danej przestrzeni topologicznej (metrycznej) X. ■

Podać definicję funkcji mierzalnej.

Funkcja $f: X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ nazywana jest mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}(A)$ jest mierzalny, tzn. $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ oznacza pewne ustalone, przeliczalnie addytywne ciało zbiorów przestrzeni X. ■

---

1. Niech $f(x,y) = 2yz + 2xz + 7xy$, $A = \big\{(x,y,z)\colon \quad x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\big\}$. Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze A.

Rozwiązanie. Mamy $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (7y + 2z, 7x + 2z, 2x + 2y)$. Jasne jest, że jedynym punktem zerowania się tego gradientu jest punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$, który leży na brzegu zbioru A. W tym punkcie funkcja przyjmuje wartość 0, a w pozostałych punktach zbioru A — wartości nieujemne. Wobec tego liczba 0 jest najmniejszą wartością funkcji f w zbiorze A. Zbiór A jest zwarty, zatem funkcja przyjmuje w pewnym jego punkcie największą wartość. Nie może przyjmować tej najmniejsze wartości wewnątrz zbioru A, bo w punktach wewnętrznych gradient jest różny od $\mathbf{0} = (0,0,0)$. Wartość największa jest więc przyjmowana w pewnym punkcie brzegu zbioru A. Z równości $f(tx,ty,tz) = t^2 f(x,y,z)$ wynika, że jeśli $x^2 + y^2 + z^2 < 9$, to $f(x,y,z)$ nie jest największą wartością funkcji f w zbiorze A. Wobec tego największa wartość jest przyjmowana w takim punkcie (x,y,z), że $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Jeśli tak i dodatkowo $xyz \neq 0$, to istnieje liczba λ taka, że $(7y + 2z, 7x + 2z, 2x + 2y) = \operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2) = 2\lambda(x,y,z)$. Wynika stąd, że wtedy $7(y - x) = 2\lambda(x - y)$.

Jeśli $x = y$, to $2x^2 + z^2 = 9$, $7x + 2z = 2\lambda x$ i $4x = 2\lambda z$. Mnożąc ostatnie równanie przez x a przedostatnie przez z otrzymujemy: $7xz + 2z^2 = 4x^2$, czyli $4x^2 - 7xz - 2z^2 = 0$. Mamy dwie możliwości: $x = 2z$, $x = -\frac{z}{4}$. Druga nie wchodzi w grę, bo zakładamy, ze $x > 0$, $y > 0$ i $z > 0$. Wobec tego $x = 2z$. Stąd $9 = 2x^2 + z^2 = 9z^2$, zatem $z = 1$. Wtedy $y = x = 2$.

Jeśli $x \neq y$, to $7 = -2\lambda$. Wtedy $7y + 2z = -7x$, co nie jest możliwe, bo $x > 0, y > 0, z > 0$.

Wynika stąd, że największą wartością funkcji może być $f(2,2,1) = 36$ lub wartość przyjmowana w punkcie sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, w którym co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa 0. Jeśli $a, b > 0$, to $f(a,b,0) = 7ab > 2ab = f(0,a,b) = f(a,0,b)$. Należy więc znaleźć największą z tych liczb $2xy$, dla których $x > 0$, $y > 0$ i $x^2 + y^2 = 9$. Niby można użyć znów mnożników Lagrange'a, ale nie warto: $2xy \leq x^2 + y^2$, przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$, co oznacza, że $x = y = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Są więc dwie kandydatki na największą liczbę $f\big(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0\big) = \frac{63}{2}$ i $f(2,2,1) = 36$. Większa jest ta druga, więc największą wartością funkcji f na zbiorze zwartym A jest $36 = f(2,2,1)$.

Uwaga. Jeśli ktoś ma „dobry wzrok" i zna nierówność $2uv \leq u^2 + v^2$, to widzi, że $7xy + 2yz + 2zx = \frac{7}{2} \cdot (2xy) + \frac{1}{2}(y \cdot 2z) + \frac{1}{2}(2z \cdot x) \leq \frac{7}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(y^2 + 4z^2) + \frac{1}{2}(4z^2 + x^2) = \frac{1}{2}(8x^2 + 8y^2 + 8z^2) = 36$, przy czym równość ma miejsce jedynie wtedy, gdy $x = y = 2z$, czyli gdy $x = y = 2$ i $z = 1$.

Jasne jest, że do tego rozwiązania wystarczyć powinna wiedza wyniesiona z gimnazjum.

---

2. Niech $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - xy^2 + \frac{1}{2}y^4$. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji f i wyjaśnić, w których z nich funkcja ma lokalne minima, w których lokalne maksima, a w których lokalnego ekstremum w ogóle nie ma.

Rozwiązanie. Mamy dwa równania $0 = \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 3x - y^2$ i $0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 2y^3 = 2y(y^2 - x)$. Jeśli $y = 0$, to $x = 0$ lub $x = 3$. Jeśli $y \neq 0$, to $y^2 = x$, więc $x = 4$. Funkcja ma więc cztery punkty krytyczne: $(0,0)$, $(3,0)$, $(4,2)$ i $(4,-2)$. Mamy $f(0,y) = \frac{1}{2}y^4 > 0$ dla $y \neq 0$, zatem w punkcie $(0,0)$ funkcja nie ma lokalnego maksimum. Mamy też $f(x,0) = (\frac{1}{3}x - \frac{3}{2})x^2 < 0$, gdy $0 < |x| < \frac{9}{2}$, zatem wartość $f(0,0)$ nie jest też lokalnie najmniejsza. Funkcja f nie ma w punkcie $(0,0)$ lokalnego ekstremum.

Mamy $D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-3 & -2y \\ -2y & 6y^2-2x \end{pmatrix}$, zatem $D^2f(3,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $D^2f(4,2) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}$ i $D^2f(4,-2) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$. Macierz drugiej różniczki $D^2f(3,0)$ ma dwie wartości własne różnych znaków, więc w punkcie $(3,0)$ funkcja f ma siodło. W punktach $(4,\pm 2)$ macierz drugiej różniczki jest określona dodatnio, więc w tych punktach funkcja f przyjmuje wartość lokalnie najmniejszą. ■

---

3. Znaleźć dyfeomorfizm przekształcający wnętrze trójkąta o wierzchołkach w punktach: $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ na wnętrze kwadratu o wierzchołkach w punktach: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

Rozwiązanie. Niech $\varphi(x,y) = (-x-y, x-y)$. φ jest liniowym izomorfizmem płaszczyzny na siebie, więc jest dyfeomorfizmem klasy C^∞. Niech $\psi(x,y) = \big(x, -1 + \frac{2(y+1)}{1-x}\big)$.

Ponieważ $\varphi(-1,0) = (1,-1)$, $\varphi(1,0) = (-1,1)$, $\varphi(0,1) = (-1,-1)$, więc obrazem trójkąta o wierzchołkach $(-1,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$ w przekształceniu φ jest trójkąt o wierzchołkach $(1,-1)$, $(-1,1)$ i $(-1,-1)$.

Przekształcenie ψ przekształca półpłaszczyznę $\{(x,y)\colon \ x < 1\}$ na siebie. Obrazem prostej postaci $x = c$ jest ona sama. Zachodzi też oczywisty wzór $\psi^{-1}(x,y) = \bigl(x, \frac{1}{2}(y+1)(1-x)-1\bigr)$, zatem ψ jest dyfeomorfizmem klasy C^∞. Jeśli $x < 1$, to $\psi(x,-1) = (x,-1)$, więc odcinek otwarty o końcach $(-1,-1)$ i $(1,-1)$ jest przekształcany na siebie. Jeśli $x < 1$, to $\psi(x,-x) = (x,1)$, więc odcinek otwarty o końcach $(-1,1)$ i $(1,-1)$ jest przekształcany na odcinek otwarty o końcach $(-1,1)$ i $(1,1)$. Wynika stąd, że obrazem odcinka otwartego o końcach $(x,-1)$ i $(x,-x)$ jest odcinek otwarty o końcach $(x,-1)$ i $(x,1)$. Oznacza to, że przekształcenie ψ przekształca trójkąt (otwarty) o wierzchołkach $(1,-1)$, $(-1,1)$ i $(-1,-1)$ na kwadrat (otwarty) o wierzchołkach $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

Wynika stąd, że przekształcenie $\psi \circ \varphi$ przekształca wnętrze trójkąta o wierzchołkach $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ na wnętrze kwadratu o wierzchołkach $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. Podamy jawny wzór na to złożenie: $\psi \circ (x,y) = \bigl(-x-y, -1 + \frac{1+x-3y}{1+x+y}\bigr) = \bigl(-x-y, -1 + \frac{2(x-y+1)}{1+x+y}\bigr)$. ■

---

4. Niech $\varphi\colon (1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Niech

$$K = \{(x,y,z):\quad y = 0,\ z = \varphi(x)\}.$$

Niech M będzie zbiorem otrzymanym przez obrót krzywej K o 360° wokół osi OZ.

(a) Wykazać, że zbiór M jest dwuwymiarową rozmaitością (włożoną w $\mathbb{R}^3$).

(b) Załóżmy, że $\varphi(2) = 1$, $\varphi'(2) = -5$. Wykazać, że $\mathbf{p} := (-1, \sqrt{3}, 1) \in M$ i napisać równanie płaszczyzny stycznej do M w punkcie $\mathbf{p}$.

Rozwiązanie. Łatwo można zauważyć, że $M = \{(x,y,z):\quad z = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}), x^2+y^2 > 1\}$. Ponieważ φ jest klasy C^1 i funkcja $\sqrt{x^2+y^2}$ też jest klasy C^1, więc funkcja $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ też jest klasy C^1. Jest ona określona na zbiorze otwartym $\{(x,y):\quad x^2+y^2 > 1\}$. Jej wykres, czyli zbiór K jest dwuwymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^3$.

Wektor grad $\bigl(-z+\varphi(\sqrt{x^2+y^2})\bigr) = \Bigl[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'\bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr), \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'\bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr), -1\Bigr]$ jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do rozmaitości M w punkcie $\bigl(x,y,\varphi(\sqrt{x^2+y^2})\bigr)$. Jeśli $x = -1, y = \sqrt{3}$, to $\varphi\Bigl(\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}\Bigr) = \varphi(2) = 1$, zatem $\mathbf{p} = (-1,\sqrt{3},1) \in M$. Wektor prostopadły do płaszczyzny stycznej do M w punkcie $\mathbf{p}$ to $\bigl[\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}, -1\bigr]$. Równanie tej płaszczyzny wygląda więc tak: $5x - 5\sqrt{3}y - 2z = -5 - 15 - 2 = -22$. ■
