Analiza I_2, egzamin, część zadaniowa 17 czerwca 2008

15:35 — 18:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego oraz jego nr. indeksu.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Za każde zadanie można otrzymać od 0 do 14 punktów.

---

1. **(a)** Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n-1+e^x}$ jest zbieżny dla każdej liczby rzeczywistej x.

(b) Niech $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n-1+e^x}$ dla $x\in\mathbb{R}$.

(c) Znaleźć zbiór wszystkich punktów ciągłości funkcji f.

(d) Znaleźć zbiór wszystkich punktów różniczkowalności funkcji f.

(e) Obliczyć $f'(0)$.

---

2. **(a)** Znaleźć promień zbieżności R szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 4^n}\,.$$

(b) Czy ten szereg jest zbieżny dla $x=R$? Czy ten szereg jest zbieżny dla $x=-R$?

(c) Niech A będzie zbiorem wszystkich $x\in\mathbb{R}$, dla których rozważany szereg jest zbieżny. Czy jest on jednostajnie zbieżny na zbiorze A?

(d) Czy jest on niemal jednostajnie zbieżny na zbiorze A?

(e) Znaleźć sumę badanego szeregu dla dowolnego $x\in A$.

---

3. Niech $f(x)=\frac{1}{2+\sin x}$ dla $x\in\mathbb{R}$.

(a) Obliczyć: $\int_0^{\pi/2}f(x)\,dx$.

(b) Obliczyć: $\int_0^{2\pi}f(x)\,dx$.

---

4. **(a)** Rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu $p=0$ funkcję $f(x)=x^2\ln(4-x^2)$.

(b) Obliczyć $f^{(2008)}(0)$.

---

5. Niech $f\colon[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją wypukłą, dwukrotnie różniczkowalną. Wykazać, że dla każdej liczby $x\geq 0$ zachodzi nierówność $f'(x)\leq 0$.
