Analiza matematyczna 2, klasówka, 5 grudnia 2003

Rozwiązania różnych zadań muszą być na oddzielnych kartkach

Każdą oddawaną kartkę należy podpisać **CZYTELNIE** w lewym górnym rogu:

numerem indeksu, imieniem i nazwiskiem własnym oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

1. W jakich punktach funkcja $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$ jest różniczkowalna?

2. Wykazać, że odwzorowanie $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowane równością $\Phi\binom{x}{y} = \binom{x^2-y^2+x}{2xy+y}$ jest dyfeomorfizmem półpłaszczyzny otwartej $\left\{\binom{\mathbf{x}}{y}\colon\quad x > \frac{1}{2}\right\}$ na pewien zbiór $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Znaleźć zbiór G. Obliczyć różniczkę $D\Phi^{-1}\binom{2}{0}$.

3. Niech $f\binom{x}{y} = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 4y^2$. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji f, tzn. te w których jej gradient jest wektorem zerowym i wyjaśnić, w których z nich funkcja f ma lokalne minima, w których lokalne maksima, a w których lokalnego ekstremum nie ma.

4. Znaleźć kres dolny odległości punktu $(3,5,10)$ od zbioru złożonego z tych punktów (x,y,z), dla których zachodzi równość $x = y^2 + z^2$.

5. Niech L będzie liniowym izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^k$ na siebie. Wykazać, że $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty} \|L\mathbf{x}\| = \infty$. Niech $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$ dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Definiujemy $f(\mathbf{x}) = \varphi\big(L\varphi(\mathbf{x})\big)$ i $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dla jakich izomorfizmów L funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0}$.