Analiza matematyczna 2, część dziewiąta

Tekst poprawiony 10 marca 2009

Omówiliśmy całkowanie funkcji nieujemnych. W tej części zajmiemy się całkowaniem funkcji dowolnego znaku. Zakładamy wszędzie, że na przestrzeni X zdefiniowana jest miara μ (więc również przeliczalnie addytywne ciało zbiorów mierzalnych) oraz że f jest funkcją mierzalną określoną na X lub mierzalnym podzbiorze X. W drugim przypadku można funkcję f przedłużyć do funkcji mierzalnej na całej przestrzeni definiując jej wartość poza dziedziną jako 0. Sprawdzenie, że rozszerzona w ten sposób funkcja jest mierzalna nie przedstawia najmniejszych trudności (należy skorzystać z definicji i tego, że dopełnienie zbioru mierzalnego jest mierzalne).

Definicja części nieujemnej i niedodatniej funkcji

Funkcje zdefiniowane równościami $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_- = \max(-f(x), 0)$ nazywamy częścią nieujemną (dodatnią) i niedodatnią (ujemną) funkcji f. ■

Z podstawowych własności funkcji mierzalnych wynika od razu, że funkcje f_+ i f_- są mierzalne. Zachodzą oczywiste wzory $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ oraz $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. Całki z funkcji f_+ i f_- są zdefiniowane, bo te funkcje są nieujemne.

Definicja całki z funkcji mierzalnej

$\int_X f\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu$, jeśli tylko różnica całek jest zdefiniowana, tzn. co najmniej jedna z całek $\int_X f_+\,d\mu$, $\int_X f_-\,d\mu$ jest skończona. Mówimy, że funkcja f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_X f\,d\mu$ jest skończona. ■

Jasne jest, że w przypadku funkcji nieujemnej f mamy $f_+ = f$, więc otrzymujemy tę samą całkę, którą zajmowaliśmy się w przypadku funkcji nieujemnych.

Funkcja f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_X |f|\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu + \int_X f_-\,d\mu < +\infty$. Jest więc inaczej niż w przypadku całki Riemanna – funkcja f może nie mieć całki Riemanna, a jej wartość bezwzględna może być całkowalna w sensie Riemanna, np. $f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $f(x) = -1$ dla $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$, $f(x) = 0$ dla $x \notin [0,1]$. Wykażemy teraz kilka podstawowych własności całki .

Twierdzenie o elementarnych własnościach całki Lebesgue'a

0° $\int_X f\,d\mu$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_X |f|\,d\mu < +\infty$.

1° Jeśli $f \le g$, to $\int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$.

2° Jeśli $|f| \le g$ i funkcja g jest całkowalna, to również funkcja f jest całkowalna i zachodzi nierówność $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$.

3° Jeśli funkcja f jest ograniczona i $\mu(X) < +\infty$, to funkcja f jest całkowalna na X.

4° Jeśli funkcja $f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in X$ (tzn. miara zbioru tych $x \in X$, dla których $f(x) \neq 0$, jest równa 0), to $\int_X f\,d\mu = 0$.

5° Jeśli funkcja f jest całkowalna, to $|f(x)| < +\infty$ dla prawie wszystkich $x \in X$, tzn. miara zbioru tych $x \in X$, dla których $|f(x)| = \infty$, jest równa 0.

6° Jeśli funkcja f jest całkowalna na zbiorze mierzalnym B, $A \subseteq B$ jest zbiorem mierzalnym, to funkcja f jest całkowalna na zbiorze A.

7° Jeśli $\int_X f$ istnieje i $c \in \mathbb{R}$, to funkcja cf jest całkowalna i $\int_X (cf)\,d\mu = c\int_X f\,d\mu$. (całka jest jednorodna)

8° Jeśli istnieją całki $\int_X f\,d\mu$, $\int_X g\,d\mu$ i zdefiniowana jest suma $\int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$, to istnieje całka $\int_X (f+g)\,d\mu$ i zachodzi równość $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$. (całka jest addytywna)

Z własności 7° i 8° wynika, że przyporządkowanie funkcji całkowalnej jej całki jest operacją liniową, przestrzeń liniowa, którą mamy tu na myśli, tj. przestrzeń funkcji całkowalnych na ustalonej przestrzeni X jest na ogół nieskończenie wymiarowa, ale również w takich sytuacjach liniowość jest bardzo istotną własnością.

Dowód. Dowody własności $0° - 4°$ są natychmiastowe.

Gdyby funkcja f przyjmowała wartość $+\infty$ na zbiorze miary dodatniej, to zachodziłaby równość $\int_X f_+\,d\mu = +\infty$, więc również $\int_X f\,d\mu = +\infty$ (całka $\int_X f_-\,d\mu$ musiałaby w tej sytuacji być skończona!). Analogicznie w przypadku funkcji przyjmującej wartość $-\infty$ na zbiorze miary dodatniej. Własność 5° można uznać za udowodnioną.

Własność 6° wynika od razu z tego, że $\int_A f_+\,d\mu \le \int_B f_+\,d\mu < \infty$ i $\int_A f_-\,d\mu \le \int_B f_-\,d\mu < \infty$.

Własność 7° wynika z takiej samej własności dla funkcji nieujemnej i tego, że $(-f)_+ = f_-$ i $(-f)_- = f_+$.

Ostatnia z wypisanych własności całki jest najtrudniejsza do dowodu głównie ze względu na ogólność założeń. Mamy
$f+g = (f_+ - f_-)+(g_+ - g_-) = (f+g)_+ + \big(f_+ + g_+ - (f+g)_+\big) - \Big((f+g)_- + \big(f_- + g_- - (f+g)_-\big)\Big)$. Zachodzi też wzór $f_+ + g_+ - (f+g)_+ = f_- + g_- - (f+g)_- \ge 0$. Wobec tego, że dla funkcji nieujemnych dowodzona teza jest prawdziwa, mamy: $\int f_+\,d\mu + \int g_+\,d\mu = \int (f_+ + g_+)\,d\mu = \int (f+g)_+\,d\mu + \int \big(f_+ + g_+ - (f+g)_+\big)\,d\mu$ oraz $\int f_-\,d\mu + \int g_-\,d\mu = \int (f_- + g_-)\,d\mu = \int (f+g)_-\,d\mu + \int \big(f_- + g_- - (f+g)_-\big)\,d\mu$. Jeśli więc całki $\int f\,d\mu$ i $\int g\,d\mu$ są **skończone**, to $\int f_+\,d\mu + \int g_+\,d\mu - \int f_-\,d\mu - \int g_-\,d\mu = \int (f+g)_+\,d\mu - \int (f+g)_-\,d\mu$. Stąd własność 8° wynika dla funkcji **całkowalnych**.

Załóżmy teraz, że $\int_X f\,d\mu = \infty$ i $\int_X g\,d\mu \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że $\int_X f_+\,d\mu = \infty$, $\int_X f_-\,d\mu \in \mathbb{R}$, $\int_X g_+\,d\mu \in \mathbb{R}$, $\int_X g_-\,d\mu \in \mathbb{R}$. Mamy więc $\int_X (f+g)_-\,d\mu \le \int_X (f_- + g_-)\,d\mu = \int_X f_-\,d\mu + \int_X g_-\,d\mu \in \mathbb{R}$.

Należy wykazać, że $\int_X (f+g)_+ = \infty$. Niech $A = \{x\colon\ f(x) > 0 \text{ i } g(x) \ge 0\}$ i niech $B = \{x\colon\ f(x) > 0 > g(x)\}$. Jeśli $\int_B f\,d\mu < \infty$, to $\int_A f = \infty$, bowiem prawdziwe są równości:

$$\infty = \int_X f_+ = \int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu,$$

więc

$$\int_X (f+g)_+\,d\mu \ge \int_A (f+g)_+\,d\mu = \int_A (f+g)\,d\mu \ge \int_A f\,d\mu = \infty.$$

Teraz założymy, że $\int_B f\,d\mu = \infty$. Niech (f_n) oznacza niemalejący ciąg nieujemnych funkcji prostych zbieżny do funkcji f na zbiorze B. Jeśli $\int_B f_n\,d\mu < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to na mocy już udowodnionej części twierdzenia mamy

$$\int_B (f+g) \geq \int_B (f_n+g)\,d\mu = \int_B f_n\,d\mu + \int_B g\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty + \int_B g\,d\mu = \infty$$

— ostatnie przejście graniczne jest konsekwencją twierdzenia Lebesgue'a–Levi'ego o monotonicznym przechodzeniu do granicy. Załóżmy teraz, że dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi równość $\int_B f_n\,d\mu = \infty$. Całka $\int_B f_n\,d\mu$ jest sumą składników postaci $c\mu(C)$, gdzie $C \subseteq B$. Co najmniej jeden z nich musi być nieskończony. Jeżeli $c = \infty$, to również $c + g = \infty$ przynajmniej prawie wszędzie w zbiorze C, bo funkcja g jako całkowalna na zbiorze B jest prawie wszędzie skończona (na zbiorze miary 0 suma może nie być określona). Druga możliwość to $\mu(C) = \infty$ i $\infty > c > 0$. Definiujemy zbiór $D = \{x \in C\colon \quad |g(x)| \geq \frac{c}{2}\}$. Ponieważ $\int_C |g|\,d\mu < \infty$, więc $\mu(D) < \infty$. Wobec tego, na mocy już wykazanej części twierdzenia, zachodzi równość $\int_D (c+g)\,d\mu = c\mu(D) + \int_D g\,d\mu$. Dla $x \in C \setminus D$ zachodzi nierówność $c + g \geq \frac{c}{2}$, zatem $\int_{C\setminus D} (c+g)\,d\mu \geq \frac{c}{2} \cdot \mu(C \setminus D) = +\infty$. Wynika stąd, że $\int_C (f_n+g)\,d\mu = \int_{C\setminus D} (f_n+g)\,d\mu + \int_D (f_n+g)\,d\mu = +\infty = \int_C f_n\,d\mu + \int_C g\,d\mu$. Wykazaliśmy, że dowodzony wzór ma miejsce na każdym zbiorze, na którym f_n jest stała. Wobec tego, że wszystkie występujące tu nieskończone składniki są równe $+\infty$, wzór zachodzi dla funkcji f_n na zbiorze B. Ponieważ $f + g \geq f_n + g$, więc również $\int_B (f+g)\,d\mu = \infty$. W podobny sposób można przeanalizować przypadek $\int_X f\,d\mu = \infty = \int_X g\,d\mu$. Dowód został wymęczony. ■

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

Jeśli $f_n\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ są mierzalne dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, $g\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ jest całkowalna i $|f_n(x)| \leq g(x)$ dla prawie wszystkich $x \in X$ oraz $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dla prawie wszystkich $x \in X$, to funkcja f jest całkowalna i zachodzi równość $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

Dowód. Funkcja f jest mierzalna, bo jest granicą ciągu funkcji mierzalnych. Wobec tego funkcja $|f|$ jest również mierzalna oraz $\int_X |f|\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu < \infty$, zatem f jest funkcją całkowalną. Skorzystamy teraz z lematu Fatou. Mamy

$$2\int_X g\,d\mu = \int_X \big(2g - \lim_n |f - f_n|\big)\,d\mu = \int_X \lim_n \big(2g - |f - f_n|\big)\,d\mu = \int_X \liminf_n \big(2g - |f - f_n|\big) \leq$$
$$\leq \liminf_n \int (2g - |f - f_n|) = 2\int_X g\,d\mu - \limsup_n \int_X |f - f_n|\,d\mu.$$

Stąd wynika, że $\limsup_n \int_X |f - f_n|\,d\mu \leq 0$, więc oczywiście $\limsup_n \int_X |f - f_n|\,d\mu = 0$, zatem zachodzi równość $\lim_n \int_X |f - f_n|\,d\mu = 0$, a ponieważ $\left|\int_X f\,d\mu - \int_X f_n\,d\mu\right| \leq \int_X |f - f_n|\,d\mu$, więc możemy napisać $\lim_n \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga

Z tego, że $\lim_n f_n(x) = f(x)$ dla wszystkich $x \in X$ nie wynika, że $\lim_n \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$ nawet wtedy, gdy wszystkie rozważane funkcje są całkowalne. Niech $f_n(x) = 0$ dla $x \in [\frac{1}{n}, 1]$ a dla $x \in [0, \frac{1}{n}]$ niech $f_n(x) = 4nx\big(\frac{1}{2n} - |x - \frac{1}{2n}|\big)$. Zachodzą wzory $f_n(x) \geq 0$, $\int_{[0,1]} f_n\,d\ell_1 = 1$ oraz $\lim_n f_n(x) = 0$. ■

Twierdzenie o całkowalności w sensie Lebesgue'a funkcji całk. w sensie Riemanna

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest również całkowalna w sensie Lebesgue i obie całki są równe.

Dowód. Ponieważ zbiór punktów nieciągłości funkcji f ma miarę 0, więc funkcja ta jest mierzalna. Jest też ograniczona, zatem jest całkowalna na podzbiorach miary skończonej przedziału $[a,b]$. Podzielmy przedział $[a,b]$ na n przedziałów równej długości

$$P_{n,1}=\big[0,a+\tfrac{b-a}{n}\big]\,,\ P_{n,2}=\big[a+\tfrac{b-a}{n},a+2\tfrac{b-a}{n}\big]\,,\ldots,P_{n,n}=\big[a+(n-1)\tfrac{b-a}{n},b\big]\,.$$

Niech $y_{n,j}=f\big(a+(j-1)\frac{b-a}{n}\big)$, $f_n=\sum_j y_{n,j}\,\chi_{P_{n,j}}$. Jasne jest, że jeśli p jest punktem ciągłości funkcji f, to $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(p)=f(p)$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (majorantą jest funkcja stała) wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n\,d\ell_1=\int_{[a,b]} f\,d\ell_1$. Z drugiej strony zachodzi równość $\int_{[a,b]} f_n\,d\ell_1=\sum_j y_{n,j}\cdot\frac{b-a}{n}\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ \int_a^b f(x)\,dx$, zatem $\int_{[a,b]} f\,d\ell_1=\int_a^b f(x)\,dx$. ■

Z twierdzenia tego wynika, że całki z funkcji jednej zmiennej, np. „zdefiniowanych wzorami" możemy obliczać za pomocą reguł poznanych do tej pory. Funkcje *nieujemne* na nieograniczonych przedziałach lub nieograniczone, których niewłaściwa całka Riemanna jest skończona, są całkowalne w sensie Lebesgue'a. Podkreślić należy, że funkcja przyjmująca zarówno wartości dodatnie jak i ujemne, której niewłaściwa całka Riemanna jest skończona, może być niecałkowalna w sensie Lebesgue'a. Należy podać przykład!

Często obliczanie całek ułatwia zamiana zmiennych. Umożliwia ją

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie, czyli o zamianie zmiennych

Niech $\varphi\colon G\longrightarrow\mathbb{R}^k$ będzie dyfeomorfizmem zbioru otwartego $G\subseteq\mathbb{R}^k$ na jego obraz $\varphi(G)$. Niech $f\colon\varphi(G)\longrightarrow[-\infty,+\infty]$ będzie funkcją mierzalną i nieujemną lub całkowalną. Wtedy funkcja $f\circ\varphi\cdot|\det D\varphi|$ jest mierzalna i nieujemna lub całkowalna i zachodzi równość

$$\int_{\varphi(G)} f\,d\ell_k=\int_G f\circ\varphi\cdot|\det D\varphi|\,d\ell_k\,.$$

Lemat

Załóżmy, że $Q\subseteq G$ jest kostką domkniętą (czyli k–wymiarowym przedziałem domkniętym o równych krawędziach). Dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba $\delta>0$ taka, że jeśli $R\subseteq Q$ jest kostką o środku $\mathbf{p}$ i krawędzi mniejszej niż 2δ, to $\varphi(R)\subseteq\varphi(\mathbf{p})+(1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p})(R-\mathbf{p})$.

Można tezę lematu wzmocnić i napisać, że dla dostatecznie małych liczb $\delta>0$ zachodzi

$$\varphi(\mathbf{p})+(1-\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p})(R-\mathbf{p})\subseteq\varphi(R)\subseteq\varphi(\mathbf{p})+(1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p})(R-\mathbf{p})\,,$$

co lepiej oddawałoby treść lematu. Chodzi o to, że ponieważ przekształcenie φ jest klasy C^1, więc obraz dostatecznie małej kostki mało różni się od obrazu tejże kostki przez przekształcenie afiniczne przybliżające φ. Byłoby to nieco trudniejsze w dowodzie, który przeprowadzimy używając jedynie nierówności, która znalazła się w sformułowaniu lematu.

Dowód. Kostka Q jest zbiorem zwartym, odwzorowanie $D\varphi\colon Q \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^k;\mathbb{R}^k)$ jest ciągłe, jego wartości są izomorfizmami $\mathbb{R}^k$. Istnieje więc taka liczba $M>0$, że dla każdego $\mathbf{x}\in Q$ zachodzi $\big\|\big(D\varphi(\mathbf{x})\big)^{-1}\big\|\le M$. Z jednostajnej ciągłości $D\varphi$ wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje liczba $\eta>0$ taka, że jeśli $\mathbf{x},\mathbf{y}\in Q$ i $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<\eta$, to $\|D\varphi(\mathbf{x})-D\varphi(\mathbf{y})\|<\frac{\varepsilon}{M\sqrt{k}}$. Stąd wynika, że jeśli $R\subseteq Q$ jest kostką o krawędzi $2a<2\delta:=\frac{2\eta}{\sqrt{k}}$ (więc zawartej w $B(\mathbf{p},\eta)$) i środku $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}\in R$, to $\mathbf{x}-\mathbf{p}\in R-\mathbf{p}$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\le a\sqrt{k}<\delta\sqrt{k}=\eta$ oraz

$$\big\|\big(D\varphi(\mathbf{p})\big)^{-1}\big(\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{p})\big)-(\mathbf{x}-\mathbf{p})\big\|\le\big\|\big(D\varphi(\mathbf{p})\big)^{-1}\big[\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{p})-D\varphi(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p})\big]\big\|\le$$
$$\le\sup_{t\in[0,1]}\big\|\big(D\varphi(\mathbf{p})\big)^{-1}\big[D\varphi(\mathbf{p}+t(\mathbf{x}-\mathbf{p}))-D\varphi(\mathbf{p})\big]\big\|\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\le M\cdot\tfrac{\varepsilon}{M\sqrt{k}}\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\le\varepsilon a$$

– zastosowaliśmy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Z otrzymanej nierówności wynika, że punkt $(D\varphi(\mathbf{p}))^{-1}\big(\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{p})\big)$ znajduje się w kostce o środku $\mathbf{p}$ i krawędzi $2(1+\varepsilon)\delta$, czyli w kostce $(1+\varepsilon)(R-\mathbf{p})$, zatem punkt $\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{p})$ znajduje się w równoległościanie $D\varphi(\mathbf{p})\big(R-\mathbf{p}\big)$, więc punkt $\varphi(\mathbf{x})$ leży w równoległościanie $\varphi(\mathbf{p})+D\varphi(\mathbf{p})\big(R-\mathbf{p}\big)$, a to właśnie mieliśmy wykazać. ■

Kostka R o krawędzi $2a$ i środku $\mathbf{p}$ to $\{\mathbf{x}\colon |x_j-p_j|\le a,\ j=1,2,\dots,k\}$. Jeśli $\mathbf{x}\in R$, $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\le\varepsilon a$, to dla $j=1,2,\dots,k$ mamy $|y_j-x_j|\le\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\le\varepsilon a$, więc $|y_j-p_j|\le|y_j-x_j|+|x_j-p_j|\le(1+\varepsilon)a$, tzn. $\mathbf{y}\in\mathbf{p}+(1+\varepsilon)(R-\mathbf{p})$, czyli $\mathbf{y}$ znajduje się w kostce o środku $\mathbf{p}$ i krawędzi $2(1+\varepsilon)a$ otrzymanej z kostki R przez zastosowanie jednokładności o środku $\mathbf{p}$ w skali $1+\varepsilon$. Należy zrobić rysunek w dwóch wymiarach ($k=2$).

Dowód twierdzenia o zamianie zmiennych

Zbiór otwarty można przedstawić jako sumę kostek o wnętrzach parami rozłącznych (opisaliśmy to dokładniej w dowodzie twierdzenia o jednoznaczności miary Lebesgue'a). Niech Q oznacza jedną z tych (przeliczalnie wielu) kostek, a niech oznacza jej krawędź. Wobec tego $\ell_k(Q)=a^k$. Podzielmy kostkę Q na 2^{kn} kostek $Q_1,Q_2,\dots,Q_{2^{kn}}$ kostek o krawędziach równych $\frac{a}{2^n}$. Jeśli n jest dostatecznie duże, to $\frac{a}{2^n}<\delta$, liczba $\delta>0$ została dobrana do liczby $\varepsilon>0$ zgodnie z tezą lematu. Niech $\mathbf{p}_j$ oznacza środek kostki Q_j. Z lematu wynika, że

$$\varphi(Q)=\bigcup_j\varphi(Q_j)\subseteq\bigcup_j\big[\varphi(\mathbf{p}_j)+(1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p}_j)(Q_j-\mathbf{p}_j)\big].$$

Ponieważ $\ell_k\big((1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p}_j)(Q_j-\mathbf{p}_j)\big)=(1+\varepsilon)\cdot\big|\det(D\varphi(\mathbf{p}_j))\big|\cdot\ell_k(Q_j)$, więc zachodzi nierówność

$$\ell_k(\varphi(Q))\le(1+\varepsilon)\textstyle\sum_j\big|\det(D\varphi(\mathbf{p}_j))\big|\ell_k(Q_j).$$

Zdefiniujmy $f_n(\mathbf{x})=\big|\det(D\varphi(\mathbf{p}_j))\big|$ dla $\mathbf{x}\in\mathrm{int}(Q_j)$. Mamy więc $f_n=\sum_j\chi_{\mathrm{int}(Q_j)}$. Funkcja $\mathbf{x}\to\big|\det(D\varphi(\mathbf{x}))\big|$ jest ciągła na kostce Q, która jest zwarta, zatem funkcja $\mathbf{x}\to\big|\det(D\varphi(\mathbf{x}))\big|$ jest jednostajnie ciągła na Q. Wynika stąd, że ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do $\big|\det(D\varphi)\big|$ na zbiorze $\bigcap_n\big(\bigcup_j\mathrm{int}(Q_j)\big)\subseteq Q$, więc na zbiorze miary $\ell_k(Q)$ (miara podprzestrzeni afinicznej właściwej jest równa 0, więc suma miar brzegów wszystkich rozważanych kostek równa jest 0), zatem $\int_Q f_n\,d\ell_k\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_Q\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k$, a ponieważ $\int_Q f_n\,d\ell_k=\sum_j\big|\det(D\varphi(\mathbf{p}_j))\big|\,\ell_k(Q_j)$, więc $\ell_k(\varphi(Q))\le(1+\varepsilon)\int_Q\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k$. Ostatnia nierówność zachodzi dla każdej liczby $\varepsilon>0$, zatem

$$\ell_k(\varphi(Q))\le\int_Q\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k.$$

Stąd wynika od razu, że dla $\ell_k(\varphi(G))\le\int_G\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k$. Można to rozumowanie zastosować do dowolnego zbioru otwartego $U\subseteq G$. W rezultacie $\ell_k(\varphi(U))\le\int_U\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k$ dla każdego zbioru otwartego $U\subseteq G$.

Jeśli $A\subseteq G$ jest zbiorem mierzalnym miary *skończonej*, to istnieją podzbiory $U_1\supseteq U_2\supseteq\dots$

otwarte w zbiorze G takie, że $\ell_k(U_n\setminus A)<\frac{1}{n}$, $U_n\supseteq A$. Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty}\ell_k(U_n)=\ell_k(A)$. Niech $U=\bigcap_n U_n$. Oczywiście $U\supseteq A$, $\ell_k(U\setminus A)=0$. Ponieważ zbiór $\varphi(U_n)$ jest mierzalny (bo jest otwarty jako obraz *dyfeomorficzny* zbioru otwartego), więc

$$\ell_k^*\big(\varphi(A)\big)\le\ell_k\big(\varphi(U_n)\big)\le\int_{U_n}\big|\det(D\varphi)\big|=\int_{U_1}\chi_{U_n}\big|\det(D\varphi)\big|.$$

Stąd i z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wynika, że

$$\ell_k^*\big(\varphi(A)\big)\le\lim_{n\to\infty}\ell_k\big(\varphi(U_n)\big)\le\lim_{n\to\infty}\int_{U_n}\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k=\lim_{n\to\infty}\int_{U_1}\chi_{U_n}\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k=$$

$$=\int_{U_1}\lim_{n\to\infty}\chi_{U_n}\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k=\int_{U_1}\chi_U\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k=\int_{U_1}\chi_A\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k=\int_A\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k$$

Stąd w szczególności wynika, że jeśli $\ell_k(A)=0$, to $\ell_k^*(\varphi(A))=0$, w szczególności zbiór $\varphi(A)$ jest mierzalny. Dyfeomorfizm φ jest homeomorfizmem, więc obrazy zbiorów borelowskich są zbiorami borelowskimi, więc mierzalnymi. Każdy zbiór mierzalny A można przedstawić jako sumę zbioru F typu F_σ, więc borelowskiego i zbioru B miary zero. Wobec tego zbiór $\varphi(A)=\varphi(F)\cup\varphi(B)$ jest mierzalny. Możemy więc już pisać $\ell_k\big(\varphi(A)\big)$ zamiast $\ell_k^*\big(\varphi(A)\big)$. Zauważmy jeszcze, że zbiór A jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\varphi(A)$ jest mierzalny, bo φ^{-1} również jest dyfeomorfizmem!

Każdy zbiór mierzalny $A\subseteq G$ może być przedstawiony jako suma przeliczalnej rodziny parami rozłącznych zbiorów mierzalnych $\{A_n\}$ miary skończonej. Dla każdego z nich zachodzi nierówność $\ell_k\big(\varphi(A_n)\big)\le\int_{A_n}\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k$. Sumując te nierówności otrzymujemy

$$\ell_k\big(\varphi(A)\big)\le\int_A\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k,$$

co można zapisać tak:

$$\int_{\varphi(G)}\chi_{\varphi(A)}\,d\ell_k\le\int_G\chi_{\varphi(A)}\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k.$$

Z addytywności obu stron tej nierówności wynika, że jeśli f jest nieujemną funkcją prostą, to

$$\int_{\varphi(G)}f\,d\ell_k\le\int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k.$$

Jeśli teraz f jest nieujemną funkcją mierzalną na zbiorze $\varphi(G)$, to istnieje niemalejący ciąg (f_n) nieujemnych funkcji prostych zbieżny do φ. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty}f_n\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|=f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|$, zatem funkcja $f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|$ jest mierzalne i na mocy twierdzenia Lebesgue'a–Levi'ego zachodzi

$$\int_{\varphi(G)}f\,d\ell_k=\lim_{n\to\infty}\int_{\varphi(G)}f_n\,d\ell_k\le\lim_{n\to\infty}\int_G f_n\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k=\int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k.$$

Wiemy więc, że nierówność $\int_{\varphi(G)}f\,d\ell_k\le\int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k$ zachodzi dla każdego dyfeomorfizmu φ, każdego zbioru otwartego G i każdej nieujemnej funkcji mierzalnej. Możemy więc zastosować ją do funkcji $f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|$, zbioru $\varphi(G)$ i dyfeomorfizmu φ^{-1}. Mamy $\varphi^{-1}\big(\varphi(G)\big)=G$ oraz

$$\Big(f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\Big)\circ\varphi^{-1}\cdot\big|\det(D\varphi^{-1})\big|=$$

$$=f\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\circ\varphi^{-1}\cdot\big|\det(D\varphi^{-1})\big|=f\cdot\big|\det D(\varphi\circ\varphi^{-1})\big|=f,$$

zatem $\int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k\le\int_{\varphi(G)}\Big(f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\Big)\circ\varphi^{-1}\cdot\big|\det(D\varphi^{-1})\big|\,d\ell_k=\int_{\varphi(G)}f\,d\ell_k$.
W połączeniu z poprzednią nierównością mamy

$$\int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k\le\int_{\varphi(G)}f\,d\ell_k\le\int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k,\ \text{czyli}$$

$$\int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k=\int_{\varphi(G)} f\,d\ell_k\,,$$

a to właśnie mieliśmy udowodnić.

Pozostały jeszcze funkcje całkowalne. To jednak nie stanowi żadnego problemu, bo każda funkcja całkowalna może być przedstawiona jako różnica dwu funkcji nieujemnych, a do każdej z nich twierdzenie już można zastosować, potem odjąć otrzymane równości stronami. ■

Wykażemy teraz twierdzenie, które pozwala sprowadzić obliczanie całek względem miary ℓ_k do obliczania całek względem miar na przestrzeniach niższego wymiaru.

Twierdzenie Fubini'ego dla miary Lebesgue'a

Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l \longrightarrow [-\infty,\infty]$ jest funkcją mierzalną nieujemną lub całkowalną. Niech $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=f(\mathbf{x},\mathbf{y})=f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$. Wtedy dla prawie każdego $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ i dla prawie każdego $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^l$ funkcje $f_{\mathbf{x}}$ i $f^{\mathbf{y}}$ są mierzalne, funkcje $\mathbf{y}\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^k} f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\,d\ell_k$ i $\mathbf{x}\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^l} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\,d\ell_l$ są mierzalne i zachodzą równości

$$\int_{\mathbb{R}^l}\Big(\int_{\mathbb{R}^k} f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\,d\ell_k\Big)d\ell_l=\int_{\mathbb{R}^{k+l}} f\,d\ell_{k+l}=\int_{\mathbb{R}^k}\Big(\int_{\mathbb{R}^l} f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\,d\ell_l\Big)d\ell_k\,.$$

Dowód. Podobnie jak w przypadku twierdzenia o zamianie zmiennych wystarczy wykazać to twierdzenie jedynie w przypadku funkcji nieujemnych, więc w dalszym ciągu rozpatrywane będą jedynie funkcje mierzalne nieujemne. Wykażemy najpierw tezę w przypadku funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych.

Dla dowolnego zbioru $A\subseteq\mathbb{R}^{k+l}$ definiujemy przekrój pionowy $A_{\mathbf{x}}=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^l:\quad(\mathbf{x},\mathbf{y})\in A\}$ i przekrój poziomy $A^{\mathbf{y}}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k:\quad(\mathbf{x},\mathbf{y})\in A\}$. Jasne jest, że prawdziwe są wzory

$$\big(\bigcup_n A_n\big)_{\mathbf{x}}=\bigcup_n(A_n)_{\mathbf{x}}\,,\ \big(\bigcap_n A_n\big)_{\mathbf{x}}=\bigcap_n(A_n)_{\mathbf{x}}\ \text{ oraz }\ \big(\mathbb{R}^{k+l}\setminus A\big)_{\mathbf{x}}=\mathbb{R}^l\setminus A_{\mathbf{x}}\,.$$

Wynika stąd, że rodzina $\mathcal{M}$ zbiorów $A\subseteq\mathbb{R}^{k+l}$, dla których oba zbiory $A_{\mathbf{x}}$ i $A^{\mathbf{y}}$ są mierzalne dla wszystkich $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ i dla wszystkich $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^l$ jest przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów zawiera ona wszystkie zbiory otwarte, bo jeśli zbiór A jest otwarty w $\mathbb{R}^{k+l}$, to oba zbiory $A_{\mathbf{x}}$ i $A^{\mathbf{y}}$ są otwarte w $\mathbb{R}^k$ i odpowiednio w $\mathbb{R}^l$. Wobec tego $\mathcal{M}\supseteq\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l})$.

Niech $\mu(A)=\int_{\mathbb{R}^l}\ell_k(A^{\mathbf{y}})\,d\ell_l$. Bez trudu sprawdzamy, że funkcja μ jest miarą na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l})$. Jeśli $A=B\times C$, B jest k–wymiarowym przedziałem, C – przedziałem l–wymiarowym, to zachodzi wzór $\mu(A)=\int_{\mathbb{R}^l}\ell_k(B)\,d\ell_l=\ell_k(B)\ell_l(C)$. Wobec tego: jeśli A jest zbiorem ograniczonym, to $\mu(A)<+\infty$, bo zbiór A jest zawarty w pewnym przedziale, jeśli A jest zbiorem otwartym, to $\mu(A)>0$, bo każdy zbiór otwarty zawiera pewien (niezdegenerowany) przedział. Jeśli zbiór A przesuwamy o wektor $\mathbf{v}=(\mathbf{v}_x,\mathbf{v}_y)$, to zbiory $A^{\mathbf{y}}$ są przesuwane o wektor $\mathbf{v}_x$, a zbiory $A_{\mathbf{x}}$ – o wektor $\mathbf{v}_{\mathbf{y}}$. Prawdziwa jest równość $\ell_k(A^{\mathbf{y}}+\mathbf{v}_x)=\ell_k(A^{\mathbf{y}})$ (i $\ell_l(A_{\mathbf{x}}+\mathbf{v}_y)=\ell_k(A_{\mathbf{x}})$), zatem $\mu(A+\mathbf{v})=\mu(A)$. Stąd i z twierdzenia o jednoznaczności miary Lebesgue'a wynika, że $\mu=\ell_k$, przypominamy, że obie miary przyjmują te same wartości na przedziałach $k+l$–wymiarowych. Stąd wynika, że lewy z dowodzonych wzorów zachodzi w przypadku funkcji charakterystycznej zbioru borelowskiego. Analogicznie dowodzimy, że prawy wzór jest prawdziwy w tym przypadku.

Jeśli $\ell_{k+l}(A) = 0$, to istnieje zbiór borelowski B (nawet typu G_δ) taki, że $\ell_{k+l}(B) = 0$ i $A \subseteq B$. Wynika stąd dla każdego $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ zachodzi nierówność $\ell_k^*(A^{\mathbf{y}}) \le \ell_k(B^{\mathbf{y}})$. Mamy też $\int_{\mathbb{R}^l} \ell_k(B^{\mathbf{y}})\,d\ell_l = 0$, zatem dla prawie wszystkich $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ zachodzi równość $\ell_k(B^{\mathbf{y}}) = 0$, więc również $\ell_k(A^{\mathbf{y}}) = 0$. Wynika stąd, że funkcja $\mathbf{y} \longrightarrow \ell_k(A^{\mathbf{y}})$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, bo jest równa 0 prawie wszędzie oraz że rodzina $\mathcal{M}$ zawiera również zbiory miary 0. Zachodzi też wzór $\int_{\mathbb{R}^l} \ell_k(A^{\mathbf{y}})\,d\ell_l = 0$. Przeliczalnie addytywne ciało podzbiorów $\mathbb{R}^{k+l}$, które zawiera zbiory borelowskie i zbiory miary 0, zawiera wszystkie zbiory mierzalne. Dowodzony wzór zachodzi w przypadku każdego zbioru mierzalnego, bo każdy zbiór mierzalny możemy przedstawić w postaci sumy dwóch rozłącznych zbiorów: borelowskiego i zbioru miary 0.

Stąd już teza twierdzenia wynika w standardowy sposób: ponieważ zachodzi dla funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych, więc zachodzi dla funkcji prostych. Potem korzystamy z tego, że każda nieujemna funkcja mierzalna jest granicą niemalejącego ciągu funkcji prostych i stosujemy twierdzenie Lebesgue'a–Levi'ego. Dowód został zakończony. ■

Definicja przestrzeni funkcji całkowalnych

Załóżmy, że μ jest dowolną miarą na przestrzeni X. Przez $L^1(\mu)$ oznaczamy zbiór funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a względem miary μ, przy czym utożsamiamy funkcje różniące się jedna od drugiej jedynie na zbiorze miary 0, tzn.

$f \in L^1(\mu) \Leftrightarrow \int_X |f|\,d\mu < \infty$ i jeśli $f, g \in L^1(\mu)$, to $f = g \Leftrightarrow \mu\big(\{x \in X\colon \quad f(x) \neq g(x)\}\big) = 0$. ■

Jest jasne, że $L^1(\mu)$ jest przestrzenią liniową: jeśli f i $\tilde{f}$ różnią się na zbiorze miary 0 oraz g i $\tilde{g}$ różnią się na zbiorze miary 0, to również $f + g$ oraz $\tilde{f} + \tilde{g}$ różnią się na zbiorze miary zero (suma dwóch zbiorów miary 0 jest zbiorem miary 0). Ta sama uwaga dotyczy mnożenia przez liczbę. Wobec tego wyniki działań nie zależą od wyboru reprezentanta z klasy abstrakcji rozpatrywanej relacji równoważności. Elementy przestrzeni $L^1(\mu)$, to formalnie rzecz biorąc klasy abstrakcji relacji równoważności, ale nazywane są funkcjami. Nie prowadzi to na ogół do nieporozumień.

Definicja normy w $L^1(\mu)$

Jeśli $f \in L^1(\mu)$, to $\|f\|_1 = \int_X |f|\,d\mu$. ■

Z własności całki wynika od razu, że jeśli f i $\tilde{f}$ różnią się na zbiorze miary 0, to zachodzi równość $\|f\|_1 = \int_X |f|\,d\mu = \int_X |\tilde{f}|\,d\mu = \|\tilde{f}\|_1$, czyli wartość normy nie zależy od wyboru reprezentanta z klasy abstrakcji rozpatrywanej relacji równoważności. Jasne jest, że $\|f+g\|_1 \le \|f|_1 + \|g|_1$ i $\|tf\|_1 = |t| \cdot \|f\|_1$ – użycie słowa norma jest więc usprawiedliwione.

Udowodnimy teraz bardzo ważne

Twierdzenie o zupełności przestrzeni $L^1(\mu)$

Przestrzeń funkcji całkowalnych jest przestrzenią metryczną zupełną: jeśli ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego, czyli jeśli $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{m,n\ge n_\varepsilon}\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$, to jest zbieżny w $L^1(\mu)$, czyli istnieje funkcja $f \in L^1(\mu)$ taka, że $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.

Dowód. Załóżmy, że ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego w $L^1(\mu)$. Niech $\big(f_{n_m}\big)$ będzie takim podciągiem, że $\frac{1}{4^{m+1}} > \|f_{n_m} - f_{n_{m+1}}\|_1 = \int_X |f_{n_m} - f_{n_{m+1}}|\,d\mu$, łatwy dowód istnienia takiego ciągu pomijamy. Niech $A_m = \{x \in X\colon\quad |f_{n_m}(x) - f_{n_{m+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^m}\}$. Mamy $\mu(A_m) < \frac{1}{2^{m+1}}$. Niech $B_m = \bigcup_{n\geq m} A_n$. $\mu(B_m) < \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots = \frac{1}{2^m}$. Niech $B = \bigcap_m B_m$.Oczywiście $\mu(B) = 0$. Jeśli $x \notin B$, to $x \notin B_m$ dla dostatecznie dużych m (bowiem $B_1 \supseteq B_2 \supset \ldots$) i wobec tego $x \notin A_n$ dla $n \geq m$. Stąd wynika, że dla każdego $j \geq m$ zachodzi nierówność $|f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| < \frac{1}{2^j}$, a stąd wynika, że szereg $\sum_j |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|$ jest zbieżny.

Niech $g(x) = \sum\limits_{j+1}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)|$. Z nierówności trójkąta wynika, że dla każdego i zachodzi nierówność $g(x) \geq |f_{n_i}(x)|$. Zachodzi też nierówność $\int_X g\,d\mu < \sum\limits_{j+1}^{\infty} \frac{1}{4^{j+1}} < \infty$, tzn. funkcja g jest całkowalna.

Dla każdego $x \notin B$ ciąg $\big(f_{n_j}(x)\big)$ spełnia warunek Cauchy'ego. Niech $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f_{n_j}(x)$. Zdefiniowaliśmy więc funkcję f poza zbiorem B, którego miara jest równa 0. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (majorantą jest funkcja g)wnioskujemy, że $\int_X f_{n_j}\,d\mu \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_X f\,d\mu$ i, co więcej, $\|f_{n_j} - f\|_1 = \int_X |f_{n_j} - f|\,d\mu \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, zatem $\lim\limits_{j\to\infty} f_{n_j} = f$ w L^1. ■

Przykład

Niech $f\binom{x}{y} = e^{-x^2-y^2}$. Obliczymy całkę $\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\ell_2$.

Niech $\varphi\binom{\mathbf{r}}{\theta} = \binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$. Niech $G = \Big\{\binom{\mathbf{r}}{\theta}\colon\quad r > 0,\, |\theta| < \pi\Big\}$. Wtedy $\varphi(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{\binom{x}{0}\colon\quad x \leq 0\big\}$, $\det\big(D\varphi\binom{r}{\theta}\big) = r$, a to oznacza, że φ przekształca dyfeomorficznie zbiór G na zbiór $\varphi(G)$. Zbiór $\big\{\binom{x}{0}\colon\quad x \leq 0\big\}$ ma miarę 0, bo jest zawarty w prostej (czyli podprzestrzeni liniowej właściwej). Mamy więc $\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\ell_2 = \int_{\varphi(G)} f\,d\ell_2 \overset{podst.}{=\!=} \int_G f\circ\varphi\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_2 \overset{Fubini}{=\!=} \int_0^\infty \big(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} r\,d\theta\big)\,dr =$ $= \int_0^\infty \big(e^{-r^2} r \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\big)\,dr = \int_0^\infty \big(2\pi e^{-r^2} r\big)\,dr = -\pi e^{-r^2}\big|_0^\infty = \pi$. Z drugiej strony zachodzi równość

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\ell_2 \overset{Fubini}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty}\big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\big)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\big(e^{-y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\big)\,dy =$$

$$= \big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\big)\big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\big) = \big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\big)^2.$$

Wynika stąd, że $\big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,d\ell_2 = \pi$, zatem $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Znaleźliśmy wartość całki z funkcji wykorzystywanej np. w statystyce. Ten sposób jest o wiele prostszy niż poznany na I roku. ■

Przykład

Znajdziemy miarę k–wymiarowej kuli o promieniu $r > 0$.

Niech

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\ldots\cdot\cos\theta_{k-2}\cos\theta_{k-1}\\
x_2 &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\ldots\cdot\cos\theta_{k-2}\sin\theta_{k-1}\\
x_3 &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{k-2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{k-2} &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3\\
x_{k-1} &= \varrho\cos\theta_1\sin\theta_2\\
x_k &= \varrho\sin\theta_1
\end{aligned}$$

Niech $\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-2},\theta_{k-1})=(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k)$.
Niech $G=\{(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-2},\theta_{k-1})\colon\quad 0<\varrho<r,|\theta_1|<\frac{\pi}{2},|\theta_2|<\frac{\pi}{2},\ldots,|\theta_{k-2}|<\frac{\pi}{2},|\theta_{k-1}|<\pi\}$. Przekształcenie φ odwzorowuje zbiór otwarty G w kulę otwartą o środku w punkcie $\mathbf{0}$ i promieniu r. Zobaczymy jakie punkty kuli są jego wartościami. Oznaczamy $\varrho=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2}$. Jeśli $|x_k|<\varrho$, to istnieje dokładnie jedna liczba $\theta_1\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ taka, że $x_k=\varrho\sin\theta_1$. Wtedy oczywiście $\varrho\cos\theta_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{k-1}^2}$. Jeśli $|x_{k-1}|<\varrho\cos\theta_1$, to istnieje dokładnie jedna liczba $\theta_2\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ taka, że $x_{k-1}=\varrho\cos\theta_1\sin\theta_2$. Kontynuując to postępowanie definiujemy kolejno liczby $\theta_3,\theta_4,\ldots,\theta_{k-2}$. W ostatnim kroku mamy zdefiniować θ_{k-1} wiedząc, że ma być spełniona równość $x_1^2+x_2^2=\varrho^2\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\ldots\cos^2\theta_{k-2}$. Jest to możliwe, jeśli $x_1>-\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}$ przy czym jednoznaczności wyboru nie gwarantuje wartość x_2, ale wartości obu współrzędnych x_1,x_2 już tak. Łatwo można zauważyć, że z każdej z równości

$$|x_k|=\varrho,\ |x_{k-1}|=\varrho\cos\theta_1,\ldots,|x_3|=\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}$$

wynika, że $x_2=0$. Również z tego, że $x_1=-\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}$ wynika, że $x_2=0$. Wobec tego, jeśli $\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},r)\setminus\varphi(G)$, to $x_2=0$, zatem $\ell_k\big(B(\mathbf{0},r)\setminus\varphi(G)\big)=0$ (równanie $x_2=0$ definiuje podprzestrzeń $k-1$–wymiarową przestrzeni $\mathbb{R}^k$). Miarę 0 ma również sfera będąca brzegiem kuli $B(\mathbf{0},r)$, czyli zbiór $\overline{B}(\mathbf{0},r)\setminus B(\mathbf{0},r)$, bo jest zawarta w sumie dwóch wykresów funkcji $k-1$ zmiennych. Wobec tego $\ell_k\big(\overline{B}(\mathbf{0},r)\big)=\ell_k\big(B(\mathbf{0},r)\big)=\ell_k\big(\varphi(G)\big)$. Macierz różniczki przekształcenia φ wygląda tak:

$$\begin{pmatrix}
\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-1} & -\varrho\sin\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-1} & \ldots & -\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\sin\theta_{k-1}\\
\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\sin\theta_{k-1} & -\varrho\sin\theta_1\cos\theta_2\ldots\sin\theta_{k-1} & \ldots & \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\varrho\sin\theta_1\sin\theta_2 & \ldots & 0\\
\sin\theta_1 & \varrho\cos\theta_1 & \ldots & 0
\end{pmatrix}$$

Bez trudu sprawdzamy, że klumny tej macierzy są k–wymiarowymi wektorami wzajemnie prostopadłymi (w przypadku $k=3$ jest to fakt powszechnie znany: promień sfery jest do niej prostopadły, więc jest prostopadły do południków i równoleżników, które też są wzajemnie prostopadłe

– wektor $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$ wskazuje kierunek promienia, wektor $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}$ – kierunek południka, wektor $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_2}$ – kierunek równoleżnika). Macierz $D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})$ jest więc ortogonalna. Wobec tego macierz $\big(D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})\big)^T\cdot D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})$ jest przekątniowa, na przekątnej znajdują się kwadraty skalarne kolumn macierzy $D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})$. Liczba $\big|\det\big(D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})\big)\big|$ równa jest więc iloczynowi długości kolumn macierzy $D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})$, czyli
$1\cdot\varrho\cdot(\varrho\cos\theta_1)\cdot(\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2)\cdot\ldots\cdot(\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2})=\varrho^{k-1}\cos^{k-2}\theta_1\cos^{k-3}\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}$.
Możemy przystąpić do rachunków: $\ell_k\big(\overline{B}(\mathbf{0},r)\big)=\ell_k\big(\varphi(G)\big)=\int_{\varphi(G)}d\ell_k=$

$$\overset{podst.}{=\!=\!=}\int_G\big|\det(D\varphi)\big|\,d\ell_k=\int_G\Big(\varrho^{k-1}\cos^{k-2}\theta_1\cos^{k-3}\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}\Big)\,d\ell_k=$$

$$\overset{Fubini}{=\!=\!=}\int_0^r\varrho^{k-1}\,d\varrho\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k-2}\theta_1\,d\theta_1\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k-3}\theta_2\,d\theta_2\cdot\ldots\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta_{k-2}\,d\theta_{k-2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}d\theta_{k-1}\,.$$

Oczywiście $\int_0^r\varrho^{k-1}\,d\varrho=\frac{1}{k}r^k$, $\int_{-\pi}^{\pi}d\theta_{k-1}=2\pi$. Na pierwszym roku wykazaliśmy też, że jeśli $j\geq 2$, to $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^j\theta\,d\theta=\frac{j-1}{j}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{j-2}\theta\,d\theta$. Z tego wzoru wnioskujemy, że jeśli j jest liczbą parzystą, to $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^j\theta\,d\theta=\frac{j-1}{j}\cdot\frac{j-3}{j-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi$, jeśli j jest nieparzyste, to $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^j\theta\,d\theta=\frac{j-1}{j}\cdot\frac{j-3}{j-2}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2$.
Podstawiając, skracając i upraszczając otrzymujemy $\ell_k\big(\overline{B}(\mathbf{0},r)\big)=r^k\pi^{k/2}\frac{1}{(k/2)!}$ dla k parzystego oraz $\ell_k\big(\overline{B}(\mathbf{0},r)\big)=2r^k\frac{1}{k}\frac{1}{k-2}\ldots\frac{1}{3}(2\pi)^{(k-1)/2}$ dla nieparzystego k. ■

Zadanko.

Zapisać otrzymany wynik za pomocą funkcji Γ bez rozróżniania przypadków. ■

Definicja stożka

Stożkiem $C(P,\mathbf{v})$ o podstawie $P\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k-1})$ i wierzchołku $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^k$, $v_k>0$ nazywamy sumę wszystkich odcinków zaczynających się w punkcie $\mathbf{v}$ i kończących w punkcie zbioru $P\times\{0\}$, mamy więc $C(P,\mathbf{v})=\big\{t(\mathbf{x},0)+(1-t)\mathbf{v}:\quad \mathbf{x}\in P,\ t\in[0,1]\big\}$. ■

Przykład

wykażemy, że $\ell_k\big(C(P,\mathbf{v})\big)=\frac{1}{k}v_k\ell_{k-1}(P)$. Wzór ten obejmuje między innymi wzór na pole trójkąta ($k=2$), wzór na objętość ostrosłupa ($k=3$, P – wielokąt) oraz wzór na objętość stożka ($k=3$, P – koło).

Niech $\varphi\colon\mathbb{R}^{k-1}\times(0,1)\to\mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $\varphi(\mathbf{x},t)=t(\mathbf{x},0)+(1-t)\mathbf{v}$. Macierz różniczki φ wygląda tak:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_1-v_1\\ 0 & t & 0 & \ldots & 0 & x_2-v_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t & x_{k-1}-v_{k-1}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -v_k \end{pmatrix}$$

Wobec tego $\big|\det\big(D\varphi(\mathbf{x},t)\big)\big|=t^{k-1}\mathbf{v}_k$. Łatwo można sprawdzić, że φ jest różnowartościowe. Ponieważ jego różniczka w dowolnym punkcie dziedziny jest izomorfizmem, więc φ jest dyfeomorfizmem zbioru otwartego $G = \mathbb{R}^{k-1} \times (0,1) \subset \mathbb{R}^k$ na jego obraz $\subset \mathbb{R}^k$. Cały stożek *z wyjątkiem punktów zbioru miary* 0, *z wyjątkiem podstawy i wierzchołka* jest zawarty w tym obrazie. Niech $C = C(P, \mathbf{v})$. Mamy więc $\ell_k(C) = \int_{\varphi(G)} \chi_C \, d\ell_k \xlongequal{podst.} \int_G \chi_{P\times(0,1)} t^{k-1} v_k \, d\ell_k \xlongequal{Fubini}$

$$= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \chi_P \, d\ell_{k-1} \cdot \int_0^1 t^{k-1} v_k \, dt = \ell_{k-1}(P) \cdot \tfrac{1}{k} v_k \, .$$

Wzór został udowodniony. ■

Definicja środka ciężkości

Jeśli μ jest pewną miarą określoną na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, zbiór A jest mierzalny, $0 < \mu(A) < \infty$, funkcje x_1, x_2, $\ldots, x_k$ są całkowalne na zbiorze A, to środkiem ciężkości zbioru A nazywamy punkt $c(A) = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ zdefiniowany wzorami $c_j = \frac{1}{\mu(A)} \int_A x_j \, d\mu$, co można zapisać również tak $c(A) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A \mathbf{x} \, d\mu$, przyjąwszy, że funkcję o wartościach wektorowych całkujemy obliczając całki z jej współrzędnych. ■

Bezpośrednio z definicji wynika, że jeśli zbiory A i B maja środki ciężkości i są rozłączne, to również zbiór $A \cup B$ ma środek ciężkości i zachodzi równość

$$c(A \cup B) = \tfrac{\mu(A)}{\mu(A)+\mu(B)} c(A) + \tfrac{\mu(B)}{\mu(A)+\mu(B)} c(B) \, .$$

Z liniowości całki i twierdzenia o podstawianiu wynika, że jeśli L jest liniowym izomorfizmem $\mathbb{R}^k$ na siebie, $\mu = \ell_k$, A ma środek ciężkości, to również zbiór $L(A)$ ma środek ciężkości i zachodzi równość $c(L(A)) = L(c(A))$:

$$c(L(A)) = \tfrac{1}{\ell_k(L(A))} \int_{L(A)} \mathbf{x} \, d\ell_k \xlongequal{podst.} \tfrac{1}{\ell_k(L(A))} \int_A L(\mathbf{y}) |\det(L)| \, d\ell_k = \tfrac{1}{\ell_k(A)} L\Big(\int_A \mathbf{y} \, d\ell_k \Big) = L(c(A)).$$

Twierdzenie Pappusa–Guldina*

Jeśli A jest zbiorem zawartym w $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad x_2 = 0 < x_1\}$, który ma środek ciężkości, B jest zbiorem, który powstaje w wyniku obrotu zbioru A o kąt 2π wokół prostej $x_1 = x_2 = 0$, to $\ell_3(B) = 2\pi r \ell_2(A)$, gdzie r jest odległością środka ciężkości zbioru A od osi obrotu.

Dowód. Niech $\varphi(x_1, x_3, t) = (x_1 \cos t, x_1 \sin t, x_3)$, $G = \{(x_1, x_3, t) : \quad x_1 > 0, \ 0 < t < 2\pi\}$. Jasne jest, że $\varphi(G)$ zawiera prawie wszystkie punkty zbioru B: wszystkie z wyjątkiem leżących w półpłaszczyźnie $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad x_1 > 0 = x_2\}$, której miara jest równa 0. Mamy

$$D\varphi(x_1, x_3, t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -x_1 \sin t \\ \sin t & 0 & x_1 \cos t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wobec tego $|\det(D\varphi(x_1, x_3, t))| = x_1$. Możemy więc napisać:

$\ell_3(B) = \int_{\varphi(G)} \chi_B \, d\ell_3 \xlongequal{podst.} \int_G \chi_B \circ \varphi \cdot x_1 \, d\ell_3 = \int_{A\times(0,2\pi)} x_1 \, d\ell_3 \xlongequal{Fubini} \int_0^{2\pi} dt \cdot \int_A x_1 \, d\ell_2 =$

$$= 2\pi \ell_2(A) \cdot \tfrac{1}{\ell_2(A)} \int_A x_1 \, d\ell_2 \, . \ ■$$

* Pappus (290–350), Guldin(1577–1643)

W ostatnio omówionych przykładach okazywało się, że po ewentualnej zmianie układu współrzędnych (czyli przekształceniu za pomocą dyfeomorfizmu) i usunięciu zbioru miary 0 mieliśmy już do czynienia z iloczynem kartezjańskim dwóch lub większej liczby zbiorów, co pozwalało na skorzystanie z twierdzenia Fubini'ego. Dowód twierdzenia Pappusa–Guldina to jeszcze jedna ilustracja tej metody.

Zajmiemy się na zakończenie tego semestru twierdzeniami pozwalającymi przybliżać funkcje całkowalne funkcjami o jeszcze lepszych własnościach. Zaczniemy od najprostszego.

Twierdzenie o gęstości funkcji ciągłych w L^1

Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i każdej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$, tzn. funkcji całkowalnej względem k–wymiarowej miary Lebesgue'a, istnieje funkcja ciągła $g\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\|f-g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^k} |f-g|\, d\ell_k < \varepsilon$.

Dowód. Niech A będzie zbiorem mierzalnym miary skończonej. Istnieją wtedy zbiory $F \subseteq A$ i $G \supset A$ takie, że $\ell_k(G \setminus F) < \varepsilon$. Z twierdzenia Tietzego (a nawet z lematu Urysohna) wynika, że istnieje funkcja ciągła $g\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,1]$ taka, że $g(x) = 0$ dla $x \notin G$ oraz $g(x) = 1$ dla $\mathbf{x} \in F$. Wobec tego $\int_{\mathbb{R}^k} |\chi_A - g|\, d\ell_k \leq \int_{G\setminus F} |\chi_A - g|\, d\ell_k \leq 1 \cdot \ell_k(G \setminus F)$. Teza twierdzenia zachodzi w przypadku funkcji charakterystycznej zbioru miary skończonej. Wobec tego zachodzi dla kombinacji liniowej takich funkcji, czyli dla dowolnej funkcji prostej: jeśli $\ell_k(A_j) < \infty$ oraz $\|\chi_{A_j} - g_j\|_1 < \frac{\varepsilon}{1+|c_1|+\cdots+|c_n|}$ dla $j = 1,2,\ldots,n$, to $\left\| \sum_j c_j \chi_{A_j} - \sum_j c_j g_j \right\|_1 \leq \sum_j |c_j| \cdot \|\chi_{A_j} - g_j\| \leq \varepsilon$. Niech f będzie nieujemną funkcją całkowalną. Istnieje niemalejący ciąg (f_n) funkcji prostych zbieżny punktowo do funkcji f. Z twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n\, d\ell_k = \int_{\mathbb{R}^k} f\, d\ell_k$, a stąd i z tego, że $f \geq f_n$ wynika, że $\|f - f_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Istnieje więc liczba n taka, że $\|f - f_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. f_n jest funkcją prostą, więc istnieje funkcja ciągła g taka, że $\|f_n - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Oczywiście $\|f-g\|_1 \leq \|f-f_n\|_1 + \|f_n - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dowód został zakończony. ∎

Definicja splotu dwu funkcji

Jeśli $f, g \in L^1(\mathbb{R}^k)$ lub jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ i g jest ograniczoną funkcja mierzalną, to

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) g(\mathbf{y})\, d\ell_k(\mathbf{y}).$$

Funkcję $f * g$ nazywamy splotem funkcji f i g. ∎

Jest oczywiste, że iloczyn funkcji całkowalnej i ograniczonej funkcji mierzalnej jet funkcja całkowalną. Nieco mniej oczywiste jest

Twierdzenie o całkowalności splotu funkcji całkowalnych

Jeśli $f, g \in L^1(\mathbb{R}^k)$, to również $f * g \in L^1(\mathbb{R}^k)$.

Dowód. Niech $\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$. Ponieważ funkcja g jest mierzalna na $\mathbb{R}^k$ i iloczyn kartezjański $\mathbb{R}^k \times A$ przestrzeni $\mathbb{R}^k$ i zbioru mierzalnego A jest mierzalny, więc funkcja $\tilde{g}$ jest mierzalna na $\mathbb{R}^{2k}$. Wykażemy, że funkcja $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^{2k} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zdefiniowana wzorem $\tilde{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ jest mierzalna (mieli ta Państwo zrobić samodzielnie!). Niech $a \in \mathbb{R}$ i niech $A = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k\colon \quad f(\mathbf{z}) > a\}$. Niech $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{y})$. Przekształcenie φ jest liniowym izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^{2k}$, więc jest dyfeomorfizmem. Wynika stąd, że zbiór $B \subseteq \mathbb{R}^{2k}$ jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\varphi(B)$ jest mierzalny. $\tilde{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}-\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^k \times A$. Zbiór $\mathbb{R}^k \times A$ jest mierzalny, więc również zbiór $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times A) = \varphi(\mathbb{R}^k \times A)$ jest mierzalny. Wobec tego funkcja $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$ jest mierzalna na $\mathbb{R}^{2k}$, więc również funkcja $|\tilde{f}\cdot\tilde{g}|$ jest mierzalna na $\mathbb{R}^{2k}$. Stąd $\int_{\mathbb{R}^{2k}} |f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})|\,d\ell_{2k} \xlongequal{Fubini} \int_{\mathbb{R}^k}\Big(\int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})|\,d\ell_k(\mathbf{x})\Big)\,d\ell_k(\mathbf{y}) =$

$= \int_{\mathbb{R}^k}\Big(|g(\mathbf{y})|\int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\,d\ell_k(\mathbf{x})\Big)\,d\ell_k(\mathbf{y}) \xlongequal{podst.} \int_{\mathbb{R}^k}\Big(|g(\mathbf{y})|\int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x})|\,d\ell_k(\mathbf{x})\Big)\,d\ell_k(\mathbf{y}) =$

$= \int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x})|\,d\ell_k(\mathbf{x})\cdot\int_{\mathbb{R}^k}|g(\mathbf{y})|\,d\ell_k(\mathbf{y}) < \infty,$

bo obie funkcje f,g są całkowalne. Ponieważ funkcja $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \longrightarrow f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})$ jest całkowalna, więc z twierdzenia Fubini'ego wynika, że dla prawie każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ istnieje całka $\int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})|\,d\ell_k$ i że otrzymana funkcja zmiennej $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ jest całkowalna. Wobec tego poza zbiorem miary 0 splot jest dobrze określony i jest funkcją całkowalną. ■

Twierdzenie o przemienności splotu

Jeśli funkcje f,g są całkowalne na $\mathbb{R}^k$, to $f*g = g*f$.

Dowód. $(f*g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})\,d\ell_k(\mathbf{y}) \xlongequal{\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{y}} \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{z})g(\mathbf{x}-\mathbf{z})\,d\ell_k(\mathbf{z}) = (g*f)(\mathbf{x})$. ■

Zadanko Wykazać, że jeśli funkcje f,g,h są całkowalne na $\mathbb{R}^k$, to $(f*g)*h = f*(g*h)$. ■

Zadanie Wykazać, że nie istnieje funkcja $\delta \in L^1(\mathbb{R}^k)$ taka, że dla każdej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ zachodzi wzór $\delta*f = f = f*\delta$. ■

Zadanko Wykazać, że jeśli funkcja f jest ograniczona i ciągła a funkcja g jest całkowalna, to splot $f*g$ jest funkcją ciągłą. ■

Zadanie Wykazać, że jeśli funkcja f jest całkowalna, a funkcja g jest mierzalna i ograniczona, to splot $f*g$ jest funkcją ciągłą. ■

Niech $\tilde{\beta}(t) = e^{1/(t^2-t)}$ dla $t \in (0,1)$ oraz $\tilde{\beta}(t) = 0$ dla $t \notin (0,1)$. Można sprawdzić bez większych trudności, że funkcja $\tilde{\beta}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna (uczyliśmy się tego na pierwszym roku). Określmy funkcję β wzorem $\beta(t) = \int_{-\infty}^{t}\tilde{\beta}(s)\,ds\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\beta}(s)\,ds$. Funkcja β jest funkcją klasy C^∞, bo jej pochodna ma tę własność. Dla $t \le 0$ zachodzi równość $\beta(t) = 0$, dla $t \ge 1$ – równość $\beta(t) = 1$, na przedziale $[0,1]$ funkcja β jest rosnąca. Niech $\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = \beta\big(\frac{4-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}{3}\big)$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$. Funkcja $\tilde{\alpha}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna. Jeśli $\|\mathbf{x}\| \le 1$, to $\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = 1$, jeśli $1 < \|x\| < 2$, to $0 < \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) < 1$, jeśli $\|\mathbf{x}\| \ge 2$, to $\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = 0$. Niech $\alpha(\mathbf{x}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{x})\Big/\int_{\mathbb{R}^k}\tilde{\alpha}\,d\ell_k$. Wreszcie niech $\alpha_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-k}\alpha\big(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\big)$. Ponieważ $\int_{\mathbb{R}^k}\alpha\,d\ell_k = 1$, więc $\int_{\mathbb{R}^k}\alpha_\varepsilon\,d\ell_k = 1$ dla $\varepsilon \in (0,1)$.

Wykażemy, że jeśli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ jest funkcją, która zeruje się *poza* pewną kulą, $h \in L^1(\mathbb{R}^k)$, to $h*f$ jest funkcją klasy C^∞ oraz $\frac{\partial}{\partial x_j}(f*h) = \frac{\partial f}{\partial x_j}*h$. Wynika to od razu z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej i tego, że $\frac{1}{t}\big(f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j-\mathbf{y})h(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}-\mathbf{y})h(\mathbf{y})\big) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{e}_j)h(\mathbf{y})$ dla pewnej liczby θ zależnej od wielu czynników, ale że względu na to, że $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ funkcją ciągłą, zerującą się poza pewną kulą, zatem funkcją ograniczoną, iloraz różnicowy $\frac{1}{t}\big(f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j-\mathbf{y})h(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}-\mathbf{y})h(\mathbf{y})\big)$

jest ograniczony przez $\sup_{\mathbf{z}}|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{z})|\cdot|g(\mathbf{y})|$, czyli przez funkcję całkowalną zmiennej $\mathbf{y}$. Wykazaliśmy, że $\frac{\partial}{\partial x_j}(f*h)=\frac{\partial f}{\partial x_j}*h$. Funkcje $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j=1,2,\ldots,k$ też są klasy C^∞, zerują się poza pewną kulą, więc można zakończyć dowód powołaniem się na zasadę indukcji (ciągłość pochodnych cząstkowych wynika automatycznie z istnienia następnych pochodnych cząstkowych).

Wykażemy, że jeśli f jest funkcją ciągłą, która zeruje się *poza* pewną kulą $B(\mathbf{0},r)$, $r>0$, to $\alpha_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f$, przy czym zbieżność jest jednostajna na $\mathbb{R}^k$. Funkcja f jest ciągła jednostajnie (bo zeruje się poza zbiorem ograniczonym), zatem dla każdej liczby $\eta>0$ istnieje liczba $\delta>0$ taka, że jeśli $\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|<\delta$, to $|f(\mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x}_2)|<\eta$. Mamy więc dla $\big|f(\mathbf{x})0<\varepsilon<\frac{\delta}{2}$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^k}\big(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big)\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})\,d\ell_k(\mathbf{y})\Big| = \Big|\int_{B(\mathbf{0},2\varepsilon)}\big(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big)\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})\,d\ell_k(\mathbf{y})\Big| \le$$

$$\le \int_{B(\mathbf{0},2\varepsilon)}\big|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big|\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})\,d\ell_k(\mathbf{y}) \le \eta\cdot\int_{B(\mathbf{0},2\varepsilon)}\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})\,d\ell_k(\mathbf{y})=\eta\,.$$

Ponieważ funkcje $\alpha_\varepsilon * f$ dążą jednostajnie przy $\varepsilon\longrightarrow 0$ do funkcji f i dla $0<\varepsilon<1$ wszystkie zerują się poza $B(\mathbf{0},r+2)$, więc ze zbieżności jednostajnej wynika, że $\|\alpha_\varepsilon * f - f\|_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$.

Jeśli $f\in L^1$ jest funkcją ciągłą, to $\|\alpha_n\cdot f-f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, wynika to stąd, że $0\le\alpha\le 1$ oraz $\int_{\{\|\mathbf{x}\|\ge n\}}|f|\,d\ell_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Funkcja α_n zeruje się poza $B(\mathbf{0},2n)$, więc również funkcja $\alpha_n f$ zeruje się poza tą kulą. Niech $\eta>0$. Istnieje n takie, że $\|\alpha_n f-f\|_1<\eta$. Istnieje $\varepsilon>0$ takie, że $\|\alpha_\varepsilon*(\alpha_n f)-\alpha_n f\|_1<\eta$. Wobec tego $\|\alpha_\varepsilon*(\alpha_n f)-f\|<2\eta$. Funkcja $\alpha_\varepsilon*(\alpha_n f)=(\alpha_n f)*\alpha_\varepsilon$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i zeruje się poza kulą $B(\mathbf{0},2n+2\varepsilon)$.♣ Wykazaliśmy więc, że funkcje całkowalne można przybliżać w przestrzeni metrycznej $L^1(\mathbb{R}^k)$ funkcjami klasy C^∞ i to takimi, które zerują się poza pewnym zbiorem zwartym (zależnym od funkcji przybliżającej). Prawdziwe jest więc

Twierdzenie o przybliżaniu funkcji całkowalnych funkcjami gładkimi

Jeśli $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$, $\varepsilon>0$ to istnieje funkcja $g\in C^\infty$ i liczba $r>0$ taka, że $\|\mathbf{x}\|\ge r\Rightarrow g(\mathbf{x})=0$ oraz $\|f-g\|_1=\int_{\mathbb{R}^k}\big|f-g\big|\,d\ell_k<\varepsilon$. ■

Udowodnimy jeszcze twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa. Dowód , który podamy jest jednym z wielu możliwych. Daje on konkretne wielomiany. Dodatkowo, w przypadku funkcji klasy C^m, uzyskujemy jednostajną zbieżność nie tylko wielomianów, ale również ich pochodnych do m-tego rzędu włącznie (podobnie jak w przypadku wielomianów Bernsteina).

Twierdzenie Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami

Jeśli $K\subseteq\mathbb{R}^k$ jest zbiorem zwartym, $f\colon K\longrightarrow\mathbb{R}$ – funkcja ciągłą, to istnieje ciąg (T_n) wielomianów jednostajnie zbieżny do funkcji f.

Dowód. Niech $d_n=\int_{\|\mathbf{u}\|\le 1}(1-\mathbf{u}^2)^n\,d\ell_k$. Oszacujemy tę całkę z dołu. Zastosujemy podstawienie sferyczne (biegunowe), to które użyliśmy licząc miarę kuli k–wymiarowej (str 114). Po zastosowaniu tego podstawienia, następnie twierdzenia Fubini'ego otrzymujemy równość

♣ bo jeśli $\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})\neq 0$ i $(\alpha_n f)(\mathbf{x}-\mathbf{y})\neq 0$, to $\|\mathbf{y}\|<2\varepsilon$ i $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<2n$, zatem $\|\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|\le 2n+2\varepsilon$.

$d_n = \int_{\|\mathbf{u}\|\le 1}(1-\mathbf{u}^2)^n\,d\ell_k = c_n\int_0^1(1-\varrho^2)^n\varrho^{k-1}\,d\varrho \ge c_k\int_0^1(1-\varrho)^n\varrho^{k-1}\,d\varrho \xlongequal{\text{przez części}}$

$$= c_k\Big(\tfrac{1}{k}(1-\varrho)^n\varrho^k\Big|_0^1 + \tfrac{n}{k}\int_0^1(1-\varrho)^{n-1}\varrho^k\,d\varrho\Big) = \tfrac{n}{k}\int_0^1(1-\varrho)^{n-1}\varrho^k\,d\varrho = \ldots = \tfrac{n!}{k(k+1)\ldots(k+n)}c_k\,.$$

Stąd wynika, że $d_n \ge C_k\frac{1}{n^k}$ dla pewnej liczby $C_k>0$, bo

$$\tfrac{(n+k)(n+k-1)\ldots(1+k)}{n(n-1)\ldots 1} = (1+\tfrac{k}{n})(1+\tfrac{k}{n-1})\ldots(1+\tfrac{k}{1}) \le e^{k(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{1})} \le e^{k(1+\ln n)} = e^k\cdot n^k\,.$$

Niech $t_n(x) = \frac{1}{d_n}(1-\mathbf{x}^2)^n$. Mamy $\int_{\|\mathbf{x}\|\le 1} t_n(\mathbf{x})\,d\ell_k = 1$ oraz $t_n(\mathbf{x}) \le \frac{1}{C_n}n^k(1-x^2)^n$.

Niech $0<\delta<1$. Mamy $\int_{\delta\le\|\mathbf{x}\|\le 1} t_n(\mathbf{x})\,d\ell_k \le \frac{1}{C_n}n^k(1-\delta^2)^n\cdot\ell_k(B(\mathbf{0},1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Możemy przekształcić przez jednokładność względem punktu $\mathbf{0}$ zbiór zwarty, więc ograniczony, K tak, by jego obraz znalazł się w kuli $B(\mathbf{0},\frac14)$. Złożenie wielomianu z jednokładnością jest wielomianem, złożenie funkcji ciągłej z jednokładnością jest funkcją ciągłą. Możemy więc w dowodzie założyć, że $K\subseteq B(\mathbf{0},\frac14)$.

Jeśli $\tilde f$ jest funkcją ciągłą na zbiorze $K\subseteq B(\mathbf{0},\frac14)$, to na mocy twierdzenia Tietzego istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla $\mathbf{x}\in K$ zachodzi $\tilde f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, dla $\mathbf{x}\notin B(\mathbf{0},\frac12)$ zachodzi $f(\mathbf{x})=0$ oraz $\sup_{\mathbf{x}\in K}|\tilde f(\mathbf{x})| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x})|$. Niech $M=\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x})|$.

Niech $T_n(\mathbf{x}) = (t_n*f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} t_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\ell_k(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})t_n(\mathbf{y})\,d\ell_k(\mathbf{y})$.* Funkcja T_n jest wielomianem k zmiennych: x_1, $x_2,\ldots,x_k$, bo t_n jest wielomianem, więc $t_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ jest sumą wyrażeń postaci $ax_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_k^{m_k}$, zatem po scałkowaniu względem zmiennej $\mathbf{y}$ otrzymamy sumę wyrażeń postaci $bx_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$.

Niech $\varepsilon>0$ i niech $\delta>0$ będzie taką liczbą, że jeśli $\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|<\delta$, to $|f(\mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x}_2)|<\varepsilon$. Jeśli $\|\mathbf{x}\|\le\frac14$, to $|T_n(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})| = \Big|\int_{\mathbb{R}^k} t_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\ell_k(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\Big| =$

$$= \Big|\int_{\|\mathbf{y}\|\le\frac12} t_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\ell_k(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\Big| \xlongequal{\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{y}} \Big|\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|\le\frac12} t_n(\mathbf{u})f(\mathbf{x}-\mathbf{u})\,d\ell_k(\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})\Big| =$$

$$\xlongequal[\Rightarrow\|\mathbf{u}\|\le 3/4<1]{\|\mathbf{x}\|\le 1/4,\ \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|\le 1/2|\Rightarrow} \Big|\int_{\|\mathbf{u}\|\le 1} t_n(\mathbf{u})f(\mathbf{x}-\mathbf{u})\,d\ell_k(\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})\Big| =$$

$$= \Big|\int_{\|\mathbf{u}\|\le 1} t_n(\mathbf{u})\big(f(\mathbf{x}-\mathbf{u})-f(\mathbf{x})\big)\,d\ell_k(\mathbf{u})\Big| = \Big|\int_{\|\mathbf{u}\|\le\delta} t_n(\mathbf{u})\big(f(\mathbf{x}-\mathbf{u})-f(\mathbf{x})\big)\,d\ell_k(\mathbf{u})\Big| +$$

$$+\Big|\int_{\delta\le\|\mathbf{u}\|\le 1} t_n(\mathbf{u})\big(f(\mathbf{x}-\mathbf{u})-f(\mathbf{x})\big)\,d\ell_k(\mathbf{u})\Big| \le \varepsilon\Big|\int_{\|\mathbf{u}\|\le\delta} t_n(\mathbf{u})\,d\ell_k(\mathbf{u})\Big| + 2M\Big|\int_{\delta\le\|\mathbf{u}\|\le 1} t_n(\mathbf{u})\,d\ell_k(\mathbf{u})\Big| \le$$

$\le \varepsilon + 2M\Big|\int_{\delta\le\|\mathbf{u}\|\le 1} t_n(\mathbf{u})\,d\ell_k(\mathbf{u})\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

Zadanie Wykazać, że jeśli $f\in C^1(\mathbb{R}^k)$ i $f(\mathbf{x})=0$, gdy $\|\mathbf{x}\|\ge\frac12$, to $\frac{\partial T_n}{\partial x_j} = t_n * \frac{\partial f}{\partial x_j}$. ■

* t_n nie jest funkcją całkowalną na $\mathbb{R}^k$, ale $\|\mathbf{y}\|\ge\frac12\Rightarrow f(\mathbf{y})=0$, więc wszystkie całki są dobrze określone i $t_n*f=f*t_n$.