# Analiza II, egzamin 7 września 2009

**9:07 — 13:07**

*Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

**1.** Niech $A = \{(x,y)\colon\quad x^3 + y^3 - \frac{3}{2}xy = 0\}$. Znaleźć dwuwymiarową miarę Lebesgue'a ograniczonej składowej spójności zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

---

**2.** Niech $S^2$ oznacza sferę $\{(x_1,x_2,x_3)\colon\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $M = F(S^2)$, gdzie przekształcenie $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ jest zdefiniowane wzorem

$$(y_1,y_2,y_3,y_4) = F(x_1,x_2,x_3) = (2x_1x_2, 2x_2x_3, 2x_3x_1, x_1^2 - x_2^2)\,.$$

Wiedząc, że $M$ jest rozmaitością obliczyć $\iint_M \sqrt{4 - 3(y_2^2 + y_3^2)}\, d\ell_M(\mathbf{y})$.

---

**3.** Niech $K$ będzie zorientowanym łukiem o początku $(\pi, -1)$ i końcu $(3\pi, 1)$. Obliczyć całkę $\int_K (e^y + e^{-y})\cos x\, dx + (e^y - e^{-y})\sin x\, dy$ i wyjaśnić, jak zależy od wybranej drogi łączące wskazane punkty.

---

**4.** Niech $S^2$ oznacza sferę $\{(x,y,z)\colon\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ zorientowaną w ten sposób, że orientacja $T_{(0,0,1)}$ jest wyznaczona przez parę wektorów $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Niech $\omega(x,y,z) = \frac{x-2}{\left(\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}\,\right)^3}\, dy \wedge dz + \frac{y}{\left(\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}\,\right)^3}\, dz \wedge dx + \frac{z}{\left(\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}\,\right)^3}\, dx \wedge dy$.

Znaleźć $\int_{S^2} \omega(x,y,z)$ oraz $\int_M \omega(x,y,z)$, gdzie $M = \{(x,y,z)\colon\quad (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

---

**5.** Niech $B(\mathbf{0}, r) \subseteq \mathbb{R}^k$ będzie $k$–wymiarową kulą o środku w punkcie $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$ i promieniu $r > 0$, a $S(\mathbf{0}, r) \subseteq \mathbb{R}^k$ — $k-1$–wymiarową sferą o środku w punkcie $\mathbf{0}$ i promieniu $r > 0$. Niech $f\colon B(\mathbf{0}, R) \longrightarrow [0, \infty)$ będzie pewną funkcją ciągłą.

Udowodnić, że $\int_{B(\mathbf{0},R)} f(\mathbf{x})\, d\ell_k(\mathbf{x}) = \int_0^R \int_{S_r} f(\mathbf{x})\, d\ell_{S_r}\, dr$.

---