Rozwiązania zadań z 21 listopada 2006

1. Definicja: Wersor (wektor długości jednostkowej) $\mathbf{w}$ jest styczny do zbioru A w punkcie $\mathbf{y}_0$ wtedy i tylko wtedy (def.), gdy $\mathbf{w} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0}{\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0\|}$ dla pewnego ciągu $(\mathbf{y}_n)$ punktów zbioru $A \setminus \{\mathbf{y}_0\}$. Wektor $\mathbf{v}$ jest styczny do zbioru A w punkcie $\mathbf{y}_0$, gdy $\mathbf{v} = t\mathbf{w}$, gdzie $\mathbf{w}$ jest wersorem stycznym, a $t \geq 0$.

Niech $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o podanej własności; k-wymiarowa przestrzeń liniowa, o jakiej mowa w zadaniu, jest wykresem pewnej funkcji liniowej $\ell\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Wykażemy, że ℓ jest różniczką funkcji f w punkcie $\mathbf{0}$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieje więc ciąg wektorów $(\mathbf{h}_n)$, $\mathbf{h}_n \to \mathbf{0}$, dla którego

$$(*) \qquad \frac{|f(\mathbf{h}_n) - \ell(\mathbf{h}_n)|}{\|\mathbf{h}_n\|} \geq \varepsilon > 0.$$

Wówczas $\mathbf{v}_n = (\mathbf{h}_n, f(\mathbf{h}_n)) \in \Gamma$. Z ciągu $(k{+}1)$-wymiarowych wersorów $\left(\dfrac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|}\right)$ wybieramy podciąg zbieżny (zwartość sfery!); aby nie piętrzyć indeksów, przyjmijmy, że jest to cały ten ciąg; jego granicą jest pewien wersor $\mathbf{w}$, styczny do zbioru Γ w punkcie $(\mathbf{0}, 0)$:

$$\mathbf{w} = \lim \frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|} = \lim\left(\frac{\mathbf{h}_n}{\|\mathbf{v}_n\|}, \frac{f(\mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|}\right) = (\mathbf{h}, z), \qquad \text{gdzie} \qquad \mathbf{h} = \lim \frac{\mathbf{h}_n}{\|\mathbf{v}_n\|}, \quad z = \lim \frac{f(\mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|}.$$

W myśl założenia, $\mathbf{w}$ leży na wykresie funkcji ℓ, czyli $z = \ell(\mathbf{h})$ (stąd, w szczególności, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$). Zatem

$$\frac{f(\mathbf{h}_n) - \ell(\mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_n\|} = \left(\frac{f(\mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|} - \ell\Big(\frac{\mathbf{h}_n}{\|\mathbf{v}_n\|}\Big)\right) \cdot \frac{\|\mathbf{v}_n\|}{\|\mathbf{h}_n\|} \longrightarrow \big(z - \ell(\mathbf{h})\big) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

wbrew nierówności $(*)$. Sprzeczność kończy dowód.

2. Przyrównanie pochodnych cząstkowych do zera daje równania $7x + 8y + 4z = 104$, $3x + 6y + 2z = 52$, $6x + 8y + 5z = 104$, które wyznaczają jedyny punkt krytyczny funkcji f o współrzędnych dodatnich: $(8, 2, 8)$. Wartość funkcji w tym punkcie wynosi 2^{34}. Gdy czynnik $(52 - 3x - 4y - 2z)$ w określeniu funkcji f jest niedodatni, wartość funkcji też jest liczbą niedodatnią. Zatem kres górny funkcji f na całym dodatnim oktancie przestrzeni jest równy jej kresowi górnemu na zbiorze

$$K = \{(x, y, z)\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \ 3x + 4y + 2z \leq 52\}.$$

Zastąpienie nierówności ostrych $x, y, z > 0$ słabymi nie zmienia zbioru wartości funkcji, ma zaś tę zaletę, że uzyskany zbiór K jest zwarty. Na całym jego brzegu funkcja f ma wartość 0. Zatem

$$\sup_{x,y,z>0} f(x, y, z) = \sup_{(x,y,z)\in K} f(x, y, z) = \max_{(x,y,z)\in K} f(x, y, z) = f(8, 2, 8) = 2^{34}.$$

Oczywiście $\inf_{x,y,z>0} f(x, y, z) = -\infty$, bo na przykład $f(x, x, x) = x^{12}(52 - 9x) \longrightarrow -\infty$ gdy $x \to \infty$.

Inne uzasadnienie kresu górnego: oznaczając $t = 52 - 3x - 4y - 2z$ *mamy*

$$f(x, y, z) = 2^8 \Big(\frac{x}{2}\Big)^6 \Big(2y\Big)^2 \Big(\frac{z}{2}\Big)^4 t \leq 2^8 \left(\frac{6 \cdot (x/2) + 2 \cdot (2y) + 4 \cdot (z/2) + t}{13}\right)^{13} = 2^8 \left(\frac{52}{13}\right)^{13} = 2^{34}$$

— *nierówność średnich, z równością dla* $(x, y, z) = (8, 2, 8)$.

3. Funkcja f jest różnicą dwóch składników, z których pierwszy $\left(\sqrt{x^4 + y^2}\right)$ przedstawia — poza punktem $(0, 0)$ — funkcję różniczkowalną (złożenie wielomianu $x^4 + y^2$ z funkcją $\varphi(t) = \sqrt{t}$, różniczkowalną w przedziale $(0, \infty)$). Drugi składnik $\big(\,|y|\,\big)$ jest funkcją nieróżniczkowalną w tych i tylko tych punktach (x, y), w których $y = 0$. Zatem funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru $\{(x, y)\colon\ y \neq 0\}$, a nieróżniczkowalna w każdym punkcie zbioru $\{(x, y)\colon\ x \neq 0,\ y = 0\}$.

Pozostaje do zbadania różniczkowalność w punkcie $(0, 0)$. Obliczamy z definicji pochodne cząstkowe w tym punkcie: $f'_x(0, 0) = \lim_{t\to 0}\big(f(t, 0) - f(0, 0)\big)/t = 0$, $f'_y(0, 0) = \lim_{t\to 0}\big(f(0, t) - f(0, 0)\big)/t = 0$. Kwestia różniczkowalności sprowadza się do zbadania, czy napisany niżej iloraz dąży do 0, gdy $(x, y) \to (0, 0)$:

$$\frac{f(x, y) - (0 \cdot x + 0 \cdot y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^4 + y^2} - |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\big(\sqrt{x^4 + y^2} + |y|\big)} \leq \frac{x^4}{\sqrt{x^2}\,\big(\sqrt{x^4} + 0\big)} = |x|.$$

Z uzyskanego oszacowania wynika, że w punkcie $(0, 0)$ funkcja f *jest* różniczkowalna.

4. Występująca w podanym warunku suma $\sum x_i \cdot (\partial f/\partial x_i)$ — to iloczyn skalarny gradientu funkcji f (w punkcie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B \setminus S$) przez wektor reprezentujący ten sam punkt $(x_1, \ldots, x_n)$, czyli wynik działania różniczką $Df(\mathbf{x})$ na wektor $\mathbf{x}$ — czyli pochodna kierunkowa względem tego wektora. Jej nieujemność oznacza, że wartości funkcji f wzrastają (w sensie słabym, tzn. nie maleją), gdy punkt $\mathbf{x}$ biegnie wzdłuż dowolnego promienia kuli B ku jej brzegowi. Zatem dla każdego punktu $\mathbf{x} \in B \setminus S$ istnieje punkt $\mathbf{z} \in S$ taki, że $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{z})$. Stąd teza.