Zadania z analizy matematycznej 2002/2003, część ósma

128. Niech $a_0 = x > 0$ i $a_{n+1} = x^{a_n}$. Dla jakich x ciąg (a_n) ma granicę skończoną, dla jakich nieskończoną, a dla jakich granicy nie ma?

129. Skonstruować funkcję różniczkowalną $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ taką, że funkcja $f'\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i **nie**całkowalna w sensie Riemanna na $[0,1]$.

130. Niech f będzie funkcją co najmniej trzykrotnie różniczkowalną. Niech $S_f(x) = \dfrac{f^{(3)}(x)}{f'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$ dla tych wszystkich x, dla których $f'(x) \neq 0$. Wykazać, że jeśli $S_f < 0$ i $S_g < 0$, to również $S_{f\circ g} < 0$.

131. Wykazać, że jeśli $S_f < 0$ (zob. 130) na pewnym przedziale, to funkcja f nie ma lokalnych minimów.

132. Dla jakich funkcji f zachodzi równość $S_f(x) = 0$ (zob. 130) dla wszystkich liczb x z pewnego przedziału?

133. Funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na całej prostej i $(f(x))^2 \leq a$ oraz $(f(x))^2 + (f''(x))^2 \leq b$ dla $x \in \mathbb{R}$. Dowieść, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $(f(x))^2 + (f'(x))^2 \leq \max(a,b)$.

134. Podać przykład ciągu (f_n) funkcji różniczkowalnych zbieżnego jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji zerowej, którego ciąg pochodnych (f_n') jest zbieżny punktowo do funkcji niezerowej.

135. Dowieść, że dla każdego zbioru domkniętego $F \in \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ klasy C^∞, której zbiorem pierwiastków jest zbiór F.

136. Dowieść, że dla każdego ciągu (a_n) liczb rzeczywistych istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^∞ taka, że dla każdego n zachodzi równość $f^{(n)}(0) = a_n$.

137. Dowieść, że jeśli istnieje liczba $\lambda \in (0,1)$ taka, że $|A \cap I| \leq \lambda |I|$ dla każdego przedziału I, to $|A| = 0$.

138. Podać przykład zbioru $A \subset \mathbb{R}$, którego przecięcie z każdym przedziałem ma miarę dodatnią i którego uzupełnienie też ma tę własność.

139. Niech $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Wykazać, że $\zeta \in C^\infty(1,\infty)$.

140. Dla jakich x szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ jest zbieżny? W jakich punktach suma tego szeregu jest funkcją różniczkowalną?

141. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^∞, dla których ciąg $\left(f^{(n)}\right)$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale ograniczonym.

142. Dowieść, że jeśli $f \in C^1([a,b])$ i $g_n(x) = n(f(x + \frac{b-x}{n}) - f(x))$, to ciąg (g_n) jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$. Czy wystarczy założyć różniczkowalność funkcji f?

143. Podać przykład ciągu (f_n) funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ takiego, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na przedziale $[0,1]$ i jednocześnie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x)| = +\infty$.