Zadania z analizy matematycznej 2002/2003, część siódma

W tej mieszance znajdują się również zadania bardzo łatwe, ale nawet takie każdy powinien umieć zrobić!

114. Wykazać, że jeśli funkcje $f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi równość $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, to funkcja f ma punkty ciągłości.

115. Wykazać, że granica ciągu wielomianów jednostajnie zbieżnego na *całej prostej* jest wielomianem.

116. Wykazać, że granica ciągu wielomianów ograniczonego stopnia jednostajnie zbieżnego na przedziale domkniętym jest wielomianem.

117. Wykazać, że ciąg funkcyjny (f_n) jest jednostajnie zbieżny na przedziale domkniętym $[a,b]$ do funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) punktów przedziału $[a,b]$ zbieżnego do punktu x zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

118. Wykazać, że jeśli ciąg funkcji monotonicznych jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, to jest zbieżny jednostajnie.

119. Wykazać, że jeśli dla każdego $x \in [a,b]$ ciąg $(f_n(x))$ jest monotoniczny i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, funkcje f, f_1, f_2, ... są ciągłe, to ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[a,b]$ do funkcji f.

120. Podać przykład ciągu (f_n) funkcji ciągłych zbieżnego punktowo do funkcji ciągłej f na przedziale $[0,1]$, który nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym przedziale domkniętym $[a,b] \subset [0,1]$.

121. Wykazać, że dla każdej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ istnieje ciąg (w_n) wielomianów zbieżny punktowo do niej.

122. Niech $w_0(x) = 0$, $w_{n+1} = w_n(x) + \frac{1}{2}\left(x^2 - w_n(x)^2\right)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że ciąg (w_n) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-1,1]$. Znaleźć jego granicę.

123. Wykazać, że funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji *przedziałami liniowych*, tj. takich, które można zapisać w postaci $ax+b$ na każdym ze skończenie wielu przedziałów, na które podzielono wyjściowy przedział.

124. W oparciu o zadania nr 122 i 123 podać dowód twierdzenia Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłej wielomianami na przedziale domkniętym.

125. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na przedziale $[0,1]$ zbieżnym prawie wszędzie do funkcji $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wykazać, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $A \subset [0,1]$ miary mniejszej niż ε, na dopełnieniu którego ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie.

126. Wykazać, że jeśli ciąg funkcji całkowalnych w sensie Riemanna (f_n) jest niemalejący i zbieżny prawie wszędzie na przedziale $[a,b]$ do funkcji f całkowalnej w sensie Riemanna, to zachodzi następująca równość $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

127. Wykazać, że jeśli ciąg (B_n) jest ciągiem wielomianów Bernsteina funkcji f i funkcja ta jest klasy C^1, to ciąg (B_n') jest zbieżny jednostajnie do funcji f'.