Zadania z analizy matematycznej 2002/2003, część szósta

W tej mieszance znajdują się również zadania bardzo łatwe, ale nawet takie każdy powinien umieć zrobić!

99. Znaleźć całki

a. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$ b. $\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$ c. $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx$

d. $\int x^2 e^{3x}\sin 4x\,dx$ e. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$ f. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

g. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx$ h. $\int x\ln(1+x^4)\,dx$ i. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$

100. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon[0,1]\longrightarrow[0,1]$ jest klasy C^1 zaś $A\subset[0,1]$ jest zbiorem miary 0, to również zbiór $f(C)$ ma miarę 0.

101. Wykazać, że istnieją funkcja ciągła, różnowartościowa $f\colon[0,1]\longrightarrow[0,1]$ i zbiór $C\subset[0,1]$ miary 0 takie, że zbiór $f(C)$ ma miarę *dodatnią*.

102. Wykazać, że złożenie funkcji całkowalnych w sensie Riemanna nie musi być funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Czy wystarczy dodatkowo założyć, że funkcja wewnętrzna jest ciągła? Czy wystarczy dodatkowo założyć, że funkcja zewnętrzna jest ciągła?

103. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=0$. Można zacząć od funkcji klasy C^1.

104. Wykazać, że jeśli dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$ zachodzi równość $\int_0^1 f(x)x^n\,dx=0$, to funkcja f jest równa 0 prawie wszędzie.

105. Wykazać, że jeśli f jest nieujemną funkcją niemalejącą, wklęsłą, klasy C^2 na półprostej $[1,\infty)$, to ciąg $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ o wyrazie $a_k=\sum_{n=1}^{k}f(n)-\int_1^k f(x)\,dx-\frac{1}{2}f(k)$ jest ograniczony.

106. Znaleźć granice

a. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

b. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

c. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

d. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\sin\frac{\pi}{n^2}+\frac{n+2}{n}\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right)$

e. $\lim_{n\to\infty}n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{(nx+j)(nx+j+1)}$

f. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+1/2}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+1/n}\right)$

g. $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{j\pi}{n}}$

107. Znaleźć pochodną funkcji f, jeśli $f(x)=$

a. $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2\sin t}\,dt$ b. $\int_{x^2}^{7}\sqrt{e^t+\sin(\cos t)}\,dt$ c. $\int_{x^2}^{x^4}\sqrt{e^{t\sin t}+\cos(\sin t)}\,dt$

108. Niech f będzie funkcją ciągła na $[0,+\infty)$ i niech $\lim_{x\to\infty}f(x)=A\in\mathbb{R}$. Znaleźć $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx$.

109. Znaleźć $\lim_{x\to+\infty}2xe^{-x^2}\int_0^x e^{x^2}\,dx$.

110. Niech $F(x)=\int_0^x\sin^n t\,dt$, $G(x)=\int_0^x\cos^n t\,dt$. Dla jakich $n\in\mathbb{N}$ funkcje F i G są okresowe?

111. Obliczyć $B(k,n):=\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^n\,dx$ zakładając, że $k,n\geq 1$ są całkowite.

112. Niech $P_n = \dfrac{1}{2^n n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$. Obliczyć $\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_k(x)\,dx$.

113. Niech $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych. Wykazać, że współczynnikami wielomianu charakterystycznego $\det(A-\lambda I)$, I jest tu macierzą jednostkową, są – z dokładnością do znaku – sumy minorów głównych ustalonego wymiaru: współczynnik przy λ^j równy jest sumie minorów głównych wymiaru $n-j$. *Zob.* $3\cdot(2+i)^2\cdot(2-i)^2$.