# Zadania z analizy matematycznej 2002/2003, część piąta

*W tej mieszance znajdują się również zadania bardzo łatwe, ale nawet takie każdy powinien umieć zrobić!*

**74.** Wykazać, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(x) - \varepsilon \sin(f(x)) = x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ oraz że ta funkcja jest klasy $C^\infty$.

**75.** Wykazać, że pochodna wyznacznika macierzy $F(x) = (f_{i,j}(x))_{1\le i,j\le n}$ jest sumą $n$ wyznaczników macierzy uzyskanych z $F$ przez zastąpienie jednego z wierszy wierszem utworzonym z pochodnych funkcji występujących w zastępowanym wierszu.

**76.** Niech $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0$ dla każdego $x$ z przedziału $I$ dla pewnych funkcji analitycznych w przedziale $I$. Wykazać, że funkcje $f$ i $g$ są liniowo zależne nad $\mathbb{R}$. Wyjaśnić, czy teza pozostaje w mocy w przypadku funkcji klasy $C^\infty$.

**77.** Wykazać, że dla każdej liczby dodatniej $\omega$ istnieje dokładnie jedna funkcja $f_\omega\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $I$ oznacza pewien przedział otwarty o środku w punkcie $0$ taka, że $f''_\omega(x) = -\sin\big(f_\omega(x)\big)$ dla każdego $x \in I$, $f_\omega(0) = 0$ oraz $f'_\omega(0) = \omega$. Wykazać, że jeśli $\omega$ jest dostatecznie małe, to funkcja $f_\omega$ może być określona na całej prostej i że jest wtedy okresowa. Jeżeli $p(\omega)$ oznacza jej okres, to $\lim\limits_{\omega\to 0} = 2\pi$ oraz $\lim\limits_{\omega\to 0} \dfrac{p(\omega) - 2\pi}{\omega} = 0$.

**78.** Niech $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, przy czym $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \ne 0$. Znaleźć $f^{(n)}(x)$.

**79.** Niech $f(x) = \dfrac{x-10}{x^2 - 20x + 91}$. Znaleźć $f^{(n)}(x)$.

**80.** Znaleźć wzór na $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8} + \cdots \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$ wiedząc, że $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{2^n} = \dfrac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$.

**81.** Oszacować błąd przybliżenia $\sqrt[10]{1000} \approx 2$.

**82.** Oszacować błąd przybliżenia $(1+x)^a \approx 1 + ax$.

**83.** Obliczyć $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{(n)}$.

**84.** Niech $f$ oznacza funkcję klasy $C^{n+1}$ i niech $r_{n-1}(h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta_h \cdot h)$, $r_j$ oznacza $j$–tą resztę we wzorze Taylora. Wykazać, że jeśli $f^{(n+1)}(x_0) \ne 0$, to $\lim\limits_{h\to 0} \theta_h = \dfrac{1}{n+1}$.

**85.** Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

**86.** Niech $f$ będzie funkcją analityczną na $\mathbb{R}$ i niech $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Wykazać, że funkcja $g$ jest dobrze określona na całej prostej, że jest analityczna oraz że $g(x) = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = 0$. Znaleźć $g'(p)$ jeśli $p$ jest $k$–krotnym pierwiastkiem funkcji $f$.

*Przekształcenie $g$ jest związane z tzw. metodą Newtona znajdowania pierwiastków funkcji $f$, w wielu przypadkach ciąg $x$, $g(x)$, $g(g(x))$, ... jest zbieżny do pierwiastka funkcji $f$, czyli punktu stałego funkcji $g$, zbieżność jest tym szybsza im wartość bezwzględna pochodnej $g'$ w punkcie stałym funkcji $g$ jest mniejsza, wynika to z twierdzenia o wartości średniej.*

**87.** Niech $f$ będzie funkcją klasy $C^2$ na przedziale $[0,1]$, $|f''| \le A$, $f(0) = 0 = f(1)$. Wykazać, że $|f'| \le \dfrac{A}{2}$ na $[0,1]$.

**88.** Niech $f$ będzie funkcją klasy $C^2$ na całej prostej, niech $M_i = \sup\big\{|f^{(i)}(x)\colon \quad x \in \mathbb{R}\big\}$ dla $i \in \{0,1,2\}$. Wykazać, że $M_1^2 \le 2M_0M_2$.

**89.** Wykazać, że wielomian $\big((x^2-1)^n\big)^{(n)}$ ma wszystkie swe pierwiastki w przedziale $[-1,1]$.

**90.** Wykazać, że wszystkie pierwiastki wielomianu $e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$ są liczbami rzeczywistymi.

**91.** Wykazać, że zachodzą nierówności

**a.** $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x < \sin x < x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{4}$;

**b.** $\ln x < \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ dla $0 < x \neq 1$;

**c.** $(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c})^{a+b+c} > a^a b^b c^c > (\frac{a+b+c}{3})^{a+b+c}$ dla dowolnych liczb dodatnich $a, b, c$, z których przynajmniej dwie są różne;

**d.** $x\ln x + 2y\ln y + 3z\ln z + (x + 2y + 3z)\ln 6 \geq (x + 2y + 3z)\ln(x + 2y + 3z)$ dla dowolnych liczb dodatnich $x, y, z$.

**92.** Wykazać, że jeśli prosta ma trzy różne punkty wspólne z wykresem funkcji wypukłej, to ma z tym wykresem wspólny odcinek i nie jest ściśle wypukła.

**93.** Wykazać, że jeśli funkcja ściśle wypukła jest ciągła i *nie* jest monotoniczna, to ma wartość najmniejszą i ta najmniejsza wartość jest przyjmowana w dokładnie jednym punkcie, przy czym jest to punkt wewnętrzny dziedziny funkcji.

**94.** Wykazać, że jeśli funkcja $f$ jest wypukła na każdym z przedziałów $[a, b]$ i $[b, c]$ oraz różniczkowalna w punkcie $b$, to jest wypukła na $[a, c]$. Podać przykład świadczący o tym, że bez założenia różniczkowalności teza nie jest prawdziwa.

**95.** Zdefiniować funkcję wypukłą na $\mathbb{R}$, która nie ma pochodnej w zbiorze przeliczalnym $A \subset \mathbb{R}$ (może np. być $A = Q$).

**96.** Wykazać, że jeśli $f$ jest funkcją klasy $C^2$ i $f'(a) = 0 = f'(b)$, to istnieje punkt $c \in [a, b]$ taki, że $f''(c) \geq \dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$.

**Definicja:** *Punkt $p$ nazywamy punktem o okresie $\leq n$ funkcji $f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f(p) = p$, $f$ występuje tu $n$ razy; okresem punktu $p$ nazywamy najmniejszą z liczb $n$, dla których zachodzi powyższa równość.*

**97.** Podać przykład funkcji ciągłej $f$ przekształcającej przedział $[0, 1]$ na siebie, która ma punkt okresowy o okresie $7$, ale nie ma punktów o okresie $3$ ani o okresie $5$. Wykazać, że musi ona wtedy mieć punkty o okresie 9, 11, 13, ....

**98.** Wykazać, że jeśli funkcja ciągła $f$ przekształcająca przedział $[a, b]$ na siebie ma punkt okresowy o okresie $2^{n+1}$, to ma również punkt okresowy o okresie $2^n$.