Zadania z analizy matematycznej 2002/2003, część dziewiąta

144. Obliczyć (w odpowiedziach mogą wystąpić dziwne znaczki, np. Γ i B)

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2^n} e^{-x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$ (h) $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$ (i) $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin(\pi x)\,dx$

145. Znaleźć granice

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^\infty t^{-1}e^{-t}\,dt}{-\ln x}$

146. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon (0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ jest klasy C^1, to $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{f} = \infty$.

147. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon [0,\infty]\longrightarrow[0,\infty]$ jest ciągła i $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx=\infty$, to istnieje liczba $a>0$, taka że $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(na)=\infty$.

148. Wykazać, że jeśli ℓ jest długością elipsy, której półosie są równe $a>0$ i $b>0$, to spełniona jest nierówność $\pi(a+b)\le \ell \le \pi\sqrt{a^2+b^2}$.

149. Wykazać, że jeśli $f\colon [0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $f(0)=f(2\pi)$, to zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big(f(x)+f(2x)+f(4x)+\cdots+f(2^{n-1}x)\big) \underset{p.w.}{=\!=\!=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$