# Zadania z analizy matematycznej 2002/2003, część czwarta

*W tej mieszance znajdują się również zadania bardzo łatwe, ale nawet takie każdy powinien umieć zrobić!*

**51.** Wykazać, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2} = \frac{3\pi}{4}$.

**52.** Wykazać, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{4}$.

**53.** Wykazać, że $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{4}{\pi}$.

**54.** Wykazać, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x$.

**55.** Wykazać, że $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2\cdot 6\cdot 7} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 8\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 10\cdot 11} - \frac{1}{7\cdot 8\cdot 12\cdot 13} + \dots = \frac{1}{60}\left(\pi - \frac{149}{60}\right)$.

**56.** Wykazać, że $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} - \frac{1}{7\cdot 8\cdot 10\cdot 11} + \dots = \frac{5}{36} - \frac{1}{6}\ln 2$.

**57.** Wykazać, że $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \frac{1}{7\cdot 8\cdot 10\cdot 11} + \dots = \frac{1}{36}$.

**58.** Wykazać, że $\displaystyle\frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} - \frac{7^3}{7^4+4} + \dots = 0$.

**59.** Wykazać, że $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2\,(1^4+4)} - \frac{1}{3\cdot (3^4+4)} + \frac{1}{5\cdot (5^4+4)} - \frac{1}{7\cdot (7^4+4)} + \dots = \frac{\pi}{16}$.

**60.** Wykazać, że $\displaystyle\ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{7}\frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots\right)$, następnie wyjaśnić ilu wyrazów tego szeregu trzeba użyć, by mieć gwarancję znalezienia 5 cyfr (w układzie dziesiętnym) po przecinku liczb $\ln 2$ i $\ln 5$.

**61.** Niech $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$ dla $x \in \mathbb{R}\setminus \mathbf{Z}$. Wykazać, że funkcja $f$ jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny.

**62.** Wykazać, że jeśli $0 < a < 1$, to równanie $\displaystyle 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} = ae^x$ ma dodatni pierwiastek.

**63.** Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(e^x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\right)$.

**64.** Wykazać, że jeśli funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $p$, to zachodzi następująca równość $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p-h)}{2h} = f'(p)$.

**65.** Jeśli funkcja $f$ jest ciągła, to $\lim\limits_{h\to 0}\big(f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\big) = 0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

**66.** Jeśli funkcja $f$ jest ciągła, to $\lim\limits_{h\to 0}\big(f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\big) = 0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

**67.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej. Wiadomo, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi nierówność $|f'(x)| < 1$. Czy wynika stąd, że istnieje liczba $p$, taka że $f(p) = p$, czyli: czy funkcja $f$ ma punkt stały?

**68.** Niech $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Wyjaśnić, która liczba jest większa $\sin(\operatorname{tg} x)$, czy $\operatorname{tg}(\sin x)$. Nie wykluczamy, że odpowiedź zależy od $x$.

**69.** Ile pierwiastków ma równanie:

(i) $x^5 - 5x = a$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$; (ii) $e^x = ax^2$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

**70.** Znaleźć przedziały monotoniczności oraz wypukłości lub wklęsłości funkcji $f$, jej lokalne ekstrema i punkty przegięcia. Znaleźć granice funkcji $f$ oraz granice funkcji $f'$ w końcach przedziałów składających się na ich dziedziny (niekoniecznie takie same). Naszkicować wykres funkcji* $f$, jeśli $f(x) =$

a. $x^4(1+x)^{-3}$; b. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; c. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$;

d. $1-x+\sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$; e. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; f. $\sin x \sin 3x$;

g. $(x+1)^{5/3}\left(x^2+2x\right)^{1/3}$. Wiemy, że $f'(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)^{2/3}\left(x^2+2x\right)^{-2/3}\left(7x^2+14x+2\right)$, niewymiernymi pierwiastkami funkcji $f'$ są $x_5 \approx -1.845$ oraz $x_6 \approx -0.155$, ma ona również pierwiastek wymierny,
$f''(x) = \dfrac{2}{9}(x+1)^{-1/3}\left(x^2+2x\right)^{-5/3}\left(14x^4+56x^3+61x^2+10x-4\right)$, pierwiastkami drugiej pochodnej są $x_1 \approx 0.177$, $x_2 \approx -2.177$, $x_3 \approx -0.492$, $x_4 \approx -1.508$, są one niewymierne.

h. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x-7}}{\sqrt[3]{x^2+2x-5}}$. Wiadomo, że $f'(x) = \dfrac{4}{3}(x+1)\left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{4}{3}}\left(x^2+2x-7\right)^{-\frac{2}{3}}$,
$f''(x) = -\dfrac{4}{9}\left(9x^4+36x^3+8x^2-56x-181\right)\left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{7}{3}}\left(x^2+2x-7\right)^{-\frac{5}{3}}$
oraz że pierwiastkami (jednokrotnymi) drugiej pochodnej są liczby $x_1 \approx 1.7$ oraz $x_2 \approx -3.7$, innych pierwiastków rzeczywistych funkcja $f''$ nie ma.

**71.** Wykazać, że punkt pośredni w twierdzeniu Rolle'a może być dowolnym punktem przedziału $(a,b)$.

**72.** Niech $f(x) = x\sin(\ln(x))$ dla $x > 0$ oraz $f(0) = 0$. Niech $c_x < x$ będzie taką liczbą dodatnią, że $f(x) - f(0) = xf'(c_x)$. Wykazać, że funkcja $x \to c_x$ ma punkty nieciągłości w dowolnym przedziale postaci $(0,\delta)$, gdzie $\delta > 0$.

**73.** Niech $f\colon N(1) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze $N(1) = \{n \in N\colon \quad n \geq 1\}$, taką że $f(k\cdot n) = f(k) + f(n)$ oraz $f(2) = 1$. Wyjaśnić ile funkcji spełnia ten warunek, jeśli jest ich mniej niż 5, znaleźć wszystkie.

---

* **UWAGA:** Zakładamy, że dziedziny funkcji są tak dobrane, że operacje definiujące funkcję są wykonalne oraz że dziedziny są maksymalnymi zbiorami o tej własności.