Zadania z analizy matematycznej 2002/2003, część trzecia

29. Dowieść, że dla każdego niepustego zbioru przeliczalnego $A \subset \mathbb{R}$ istnieje funkcja monotoniczna $f_A\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, której zbiorem punktów *nieciągłości* jest A.

30. Wykazać, ze nie istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $p \in \mathbb{R}$ jest $\lim\limits_{x\to p} f(x) = +\infty$.

31. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie granicę równą 0, to dla pewnej liczby niewymiernej a musi być $f(a) = 0$.

32. Niech $\mathcal{C}$ oznacza zbiór Cantora, tj. zbiór złożony z tych wszystkich liczb z przedziału $[0,1]$, które mają rozwinięcie trójkowe, w którym nie występuje cyfra 1. Wykazać, że $\mathcal{C}$ nie zawiera żadnego przedziału oraz że jest równoliczny z przedziałem. Wykazać, że istnieje funkcja ciągła przekształcająca zbiór Cantora $\mathcal{C}$ na przedział $[0,1]$ oraz że funkcja taka nie jest różnowartościowa.

33. Wykazać, ze jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$, to f jest funkcją stałą.

34. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza to jest różnicą dwu funkcji monotonicznych ciągłych. Wyjaśnić, czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe.

35. Podać przykład funkcji ograniczonej $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

36. Funkcja f jest jednostajnie ciągła na przedziale P_1 i na przedziale P_2. Zbiór $P = P_1 \cup P_2$ jest przedziałem. Czy f musi być jednostajnie ciągła na przedziale P?

37. Funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona na każdym przedziale ograniczonym $P \subset [0,\infty)$. Istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = g$. Wykazać, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = g$.

38. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzą równości $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$. Wykazać, że istnieje o wiele więcej funkcji $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

39. Wykazać, że pierścienie (funkcyjne) $C\left([0,1]\right)$ i $C^1\left([0,1]\right)$ nie są izomorficzne.

40. Dowieść, że dla każdego wielokąta wypukłego istnieje prosta, która dzieli jednocześnie jego pole i jego obwód na połowy.

41. Dowieść, że na brzegu każdego wielokąta wypukłego istnieją cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu.

Uwaga: brzeg wielokąta wypukłego można zastąpić dowolną krzywą zamkniętą, niekoniecznie wypukłą, tj. obrazem odcinka $[0,1]$ *przy funkcji ciągłej , która przekształca oba końce tego odcinka na jeden punkt, ale to twierdzenie jest dosyć trudne i wg. mojej wiedzy nie znany jego dowód krótszy od oryginalnego dowodu Sznirelmana.*

42. Dowieść, że funkcja f przekształcająca zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (lub zespolonych) w siebie, spełniająca warunek Lipschitza ze stałą mniejszą (ostro!) od 1 ma dokładnie jeden punkt stały, tj. istnieje dokładnie jedna liczba p taka, że $f(p) = p$.

43. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Niech $f^n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ oznacza złożenie n egzemplarzy funkcji f. Dowieść, że jeśli funkcja f^n spełnia warunek Lipschitza ze stałą mniejszą (ostro!) od 1, to funkcja f ma dokładnie jeden punkt stały, tj. istnieje dokładnie jedna liczba p taka, że $f(p) = p$.

44. Wyjaśnić, czy istnieje funkcja jednostajnie ciągła przekształcająca półprostą $[0,\infty)$ na $\mathbb{R}$.

45. Wyjaśnić, czy istnieje *różnowartościowa* funkcja ciągła przekształcająca półprostą $[0,\infty)$ na $\mathbb{R}$.

46. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4xc}}{2x}$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4xc}}{2x}$.

47. Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{x}{n}\right) = 0$. Wykazać, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

48. Wykazać, że istnieje niemalejąca funkcja ciagła $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, która nie jest ściśle rosnąca na żadnym przedziale przekształcająca przedział $[0,1]$ **na** siebie.

49a. Niech $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ będzie dowolną funkcją. Niech $f^n = f\circ f\circ f\circ \ldots \circ f$ oznacza złożenie n egzemplarzy funkcji f. Mówimy, że punkt $p\in[0,1]$ jest n–okresowy wtedy i tylko wtedy, gdy $f^n(p)=p$ i liczba n jest najmniejszą, dla której zachodzi ta równość. Niech $0<c<1$ i niech $f(x)=\frac{x}{c}$ dla $0\le x\le c$. $f(x)=\frac{1-x}{1-c}$ dla $c\le x\le 1$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje co najmniej jeden punkt okresowy o okresie n oraz, że liczba takich punktów jest skończona.

49b. Niech teraz $f(x)=x+\frac{1}{2}$ dla $0\le x\le\frac{1}{2}$ i niech $f(x)=2-2x$ dla $\frac{1}{2}\le x\le 1$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje co najmniej jeden punkt okresowy o okresie n oraz, że liczba takich punktów jest skończona.

50. Niech $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ będzie funkcją ciągłą. Niech $T_x = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}$ oznacza trajektorię punktu x, f^n jest zdefiniowane w zadaniu poprzednim. Wykazać, że jeśli dla pewnego punktu $x\in[0,1]$ zbiór T_x jest domknięty (tzn. jeśli z tego że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $a_n\in T_x$ i $g=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to również $g\in T_x$), to zbiór T_x jest skończony.