Zadania z analizy matematycznej 2002/2003, część druga

22. Wyjaśnić, czy zbieżny jest szereg o wyrazie $a_n =$

a. $\dfrac{n!}{(2n)!}$; **b.** $(-1)^n \dfrac{n+1}{(n+2)\sqrt{n}}$; **c.** $(-1)^{n(n-1)}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

d. $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n (n-1)$; **e.** $(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$; **f.** $\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^a, \; a \in \mathbb{R}$;

g. $\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$; **h.** $\dfrac{x^n}{1-x}, \quad x \neq 1$; **i.** $\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}, \quad a,b \in \mathbb{R}$;

j. $\sqrt[n]{a}-1$; **k.** $\sqrt[n]{n}-1$; **l.** $\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2$;

ł.* $(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}\dfrac{1}{n}$; **m.** $\binom{a}{n}, \; a \in \mathbb{R}$; **n.** $\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}, \quad x \neq -1$;

o. $\dfrac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$; **p.** $(-1)^n\binom{a}{n}, \quad a \in \mathbb{R}$; **q.** $(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\dfrac{1}{n}$

r. $(\ln n)^a, \quad a \in \mathbb{R}$; **s.** $a^n \ln n, \quad a \in \mathbb{R}$; **t** $(-1)^{\lfloor \ln n\rfloor}\dfrac{1}{n}$.

23. Obliczyć sumę szeregu

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2^n}}{1+x^{2^n}}$ **b.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$

c. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ **d.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^n}\right)$

e. $\displaystyle\sum_{p,q\geq 2}\frac{1}{p^q-1}$, tu każda liczba p^q występuje jeden raz nawet, gdy $4^2 = 2^4$

24. Wykazać, że dla dowolnego szeregu zbieżnego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich istnieje ciąg liczb dodatnich (b_n), którego granicą jest ∞, taki że $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ jest szeregiem zbieżnym. *Nie ma więc najwolniej zbieżnego szeregu.*

25. Wykazać, że dla dowolnego szeregu rozbieżnego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich istnieje ciąg liczb dodatnich (b_n), którego granicą jest 0, taki że $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ jest szeregiem rozbieżnym. *Nie ma więc najwolniej rozbieżnego szeregu.*

26. Wykazać, że szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu (b_n) zbieżnego do 0 szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

27. Niech $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$. Wykazać, ze szereg jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i wyjaśnić, czy funkcja f jest okresowa na $\mathbb{R}$.

28. Wykazać, że jeśli (a_n) jest dowolnym ciągiem liczb dodatnich rzeczywistych, to następujący szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}$ jest zbieżny.