# Zadania z analizy matematycznej 2002/2003, część trzecia

**29.** Dowieść, że dla każdego niepustego zbioru przeliczalnego $A \subset \mathbb{R}$ istnieje funkcja monotoniczna $f_A\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, której zbiorem punktów *nieciągłości* jest $A$.

**30.** Wykazać, ze nie istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $p \in \mathbb{R}$ jest $\lim\limits_{x\to p} f(x) = +\infty$.

**31.** Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie granicę równą 0, to dla pewnej liczby niewymiernej $a$ musi być $f(a) = 0$.

**32.** Niech $\mathcal{C}$ oznacza zbiór Cantora, tj. zbiór złożony z tych wszystkich liczb z przedziału $[0,1]$, które mają rozwinięcie trójkowe, w którym nie występuje cyfra 1. Wykazać, że $\mathcal{C}$ nie zawiera żadnego przedziału oraz że jest równoliczny z przedziałem. Wykazać, że istnieje funkcja ciągła przekształcająca zbiór Cantora $\mathcal{C}$ na przedział $[0,1]$ oraz że funkcja taka nie jest różnowartościowa.

**33.** Wykazać, ze jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2$, to $f$ jest funkcją stałą.

**34.** Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza to jest różnicą dwu funkcji monotonicznych ciągłych. Wyjaśnić, czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe.

**35.** Podać przykład funkcji ograniczonej $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

**36.** Funkcja $f$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $P_1$ i na przedziale $P_2$. Zbiór $P = P_1 \cup P_2$ jest przedziałem. Czy $f$ musi być jednostajnie ciągła na przedziale $P$?

**37.** Funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona na każdym przedziale ograniczonym $P \subset [0,\infty)$. Istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = g$. Wykazać, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = g$.

**38.** Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y$ zachodzą równości $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Wykazać, że istnieje o wiele więcej funkcji $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

**39.** Wykazać, że pierścienie (funkcyjne) $C([0,1])$ i $C^1([0,1])$ nie są izomorficzne.

**40.** Dowieść, że dla każdego wielokąta wypukłego istnieje prosta, która dzieli jednocześnie jego pole i jego obwód na połowy.

**41.** Dowieść, że na brzegu każdego wielokąta wypukłego istnieją cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu.

*Uwaga: brzeg wielokąta wypukłego można zastąpić dowolną krzywą zamkniętą, niekoniecznie wypukłą, tj. obrazem odcinka* $[0,1]$ *przy funkcji ciągłej , która przekształca oba końce tego odcinka na jeden punkt, ale to twierdzenie jest dosyć trudne i wg. mojej wiedzy nie znany jego dowód krótszy od oryginalnego dowodu Sznirelmana.*

**42.** Dowieść, że funkcja $f$ przekształcająca zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (lub zespolonych) w siebie, spełniająca warunek Lipschitza ze stałą mniejszą (ostro!) od 1 ma dokładnie jeden punkt stały, tj. istnieje dokładnie jedna liczba $p$ taka, że $f(p) = p$.

**43.** Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Niech $f^n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ oznacza złożenie $n$ egzemplarzy funkcji $f$. Dowieść, że jeśli funkcja $f^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą mniejszą (ostro!) od 1, to funkcja $f$ ma dokładnie jeden punkt stały, tj. istnieje dokładnie jedna liczba $p$ taka, że $f(p) = p$.

**44.** Wyjaśnić, czy istnieje funkcja jednostajnie ciągła przekształcająca półprostą $[0,\infty)$ na $\mathbb{R}$.

**45.** Wyjaśnić, czy istnieje *różnowartościowa* funkcja ciągła przekształcająca półprostą $[0,\infty)$ na $\mathbb{R}$.

**46.** Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4xc}}{2x}$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4xc}}{2x}$.

**47.** Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{x}{n}\right) = 0$. Wykazać, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

**48.** Wykazać, że istnieje niemalejąca funkcja ciagła $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, która nie jest ściśle rosnąca na żadnym przedziale przekształcająca przedział $[0,1]$ **na** siebie.

**49a.** Niech $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ będzie dowolną funkcją. Niech $f^n = f\circ f\circ f\circ \ldots \circ f$ oznacza złożenie $n$ egzemplarzy funkcji $f$. Mówimy, że punkt $p\in[0,1]$ jest $n$–okresowy wtedy i tylko wtedy, gdy $f^n(p) = p$ i liczba $n$ jest najmniejszą, dla której zachodzi ta równość. Niech $0 < c < 1$ i niech $f(x) = \frac{x}{c}$ dla $0 \le x \le c$. $f(x) = \frac{1-x}{1-c}$ dla $c \le x \le 1$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje co najmniej jeden punkt okresowy o okresie $n$ oraz, że liczba takich punktów jest skończona.

**49b.** Niech teraz $f(x) = x + \frac{1}{2}$ dla $0 \le x \le \frac{1}{2}$ i niech $f(x) = 2 - 2x$ dla $\frac{1}{2} \le x \le 1$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje co najmniej jeden punkt okresowy o okresie $n$ oraz, że liczba takich punktów jest skończona.

**50.** Niech $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ będzie funkcją ciągłą. Niech $T_x = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}$ oznacza trajektorię punktu $x$, $f^n$ jest zdefiniowane w zadaniu poprzednim. Wykazać, że jeśli dla pewnego punktu $x \in [0,1]$ zbiór $T_x$ jest domknięty (tzn. jeśli z tego że dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzi $a_n \in T_x$ i $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to również $g \in T_x$), to zbiór $T_x$ jest skończony.