Zadania z analizy matematycznej 2002/2003

1. Znaleźć

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$,

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$,

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$,

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

f. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$;

2. Udowodnić zbieżność ciągu:

a. $b_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n$, gdzie $|q|<1$ i $|a_k|<M$ dla $k=0,1,2\ldots$;

3. Udowodnić, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n > 0$ dla każdego n, to $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} G_n = \lim\limits_{n\to\infty} H_n$,

gdzie: $A_n = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, $G_n = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$, $H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

4. Udowodnić, że dla każdych liczb dodatnich a,b i dowolnej liczby $n\in\mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} \le \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}}.$$

5. Udowodnić, że jeśli (a_n) jest ciągiem liczb dodatnich i istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ i obie granice są równe; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$, jeśli tylko granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ istnieje.

6. Niech $b_n = |a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|$. Mówimy, że ciąg (a_n) ma wahanie skończone wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (b_n) jest ograniczony. Udowodnić, że ciąg o wahaniu skończonym jest zbieżny. Podać przykład ciągu zbieżnego o wahaniu nieskończonym.

7. Wykazać, że ciąg (a_n) jest zbieżny, jeśli $a_n =$

1° $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$;

2° $\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\dfrac{\sin 3}{2^3}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$;

3° $-1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}-\ldots+(-1)^{[\sqrt{n}]}\cdot\dfrac{1}{n}$.

8. Niech $H(m) = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, γ oznacza stałą Eulera. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych $k,n>1$ zachodzi nierówność $1 > H(k)+H(n)-H(kn) > \gamma$.

9. Wykazać, że dla dowolnych ciągów (x_n), (y_n) zachodzą nierówności:

$\liminf x_n + \liminf y_n \le \liminf(x_n+y_n) \le \limsup(x_n+y_n) \le \limsup x_n + \limsup y_n$.

Podać przykłady ciągów, dla których nierówności te są ostre.

10. Wykazać, że dla dowolnych ciągów (x_n), (y_n) zachodzą nierówności:

$\liminf x_n \cdot \liminf y_n \le \liminf(x_n\cdot y_n) \le \limsup(x_n\cdot y_n) \le \limsup x_n \cdot \limsup y_n$.

Podać przykłady ciągów, dla których nierówności te są ostre.

11. Udowodnić, że jeśli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, to dla dowolnego ciągu (y_n) zachodzą równości (w punkcie **b** zakładamy, że $x_n \geq 0$):

a. $\limsup(x_n + y_n) = \limsup x_n + \limsup y_n$, **b.** $\limsup(x_n \cdot y_n) = \limsup x_n \cdot \limsup y_n$.

12. Udowodnić, że jeśli $x_n > 0$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i zachodzi równość: $\limsup x_n \cdot \limsup \dfrac{1}{x_n} = 1$, to ciąg (x_n) jest zbieżny.

13. Udowodnić, że jeśli pewien ciąg o wyrazach nieujemnych (x_n) ma taką własność, że dla *dowolnego* ciągu (y_n) zachodzi przynajmniej jedna z dwu następujących równości $\limsup(x_n + y_n) = \limsup x_n + \limsup y_n$, $\limsup(x_n \cdot y_n) = \limsup x_n \cdot \limsup y_n$, to ciąg (x_n) jest zbieżny.

14. Podać przykład ciągu (a_n) o granicy $+\infty$, takiego że dla każdej liczby naturalnej $k > 0$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0$.

15. Udowodnić, że jeśli dla dowolnej liczby naturalnej k ma miejsce równość $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0$, to dla dowolnej liczby $g \in [\liminf a_n, \limsup a_n]$ z ciągu (a_n) można wybrać podciąg o granicy g.

16. Dany jest ciąg (a_n) oraz liczba g taka, że z każdego podciągu (a_{n_k}) można wybrać podciąg zbieżny do g. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

17. Niech $\liminf a_n = 0$ i $a_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej n. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele wskaźników n, dla których wyraz a_n jest mniejszy od wszystkich wyrazów, które go poprzedzają.

18. Załóżmy, że wyrazy niemalejącego ciągu (a_n) są dodatnie. Wykazać, że zbiór wszystkich granic częściowych (punktów skupienia) ciągu $\left(\dfrac{a_n}{n + a_n}\right)$ jest przedziałem domkniętym.

19. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich zachodzą nierówności:
$\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

20. Niech $(a_{j,n})$ będzie ciągiem ograniczonym w przypadku $j = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że istnieje taki *rosnący* ciąg liczb naturalnych (k_n), że wszystkie ciągi (a_{1,k_n}), (a_{2,k_n}), (a_{3,k_n}) ... są zbieżne.

21. Niech (a_n) będzie ciągiem dodatnich liczb całkowitych. Niech

$$r_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots \cfrac{}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

Wykazać, że ciąg (r_n) jest zbieżny oraz że jego granica jest niewymierna.