Pamiętnik z wykładu z AM1, część ósma

Definicja zbieżności punktowej i jednostajnej.

Niech $f_n\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ (lub $f_n\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$) będzie ciągiem funkcji określonych na zbiorze A. Mówimy, że ciąg ten jest zbieżny *punktowo* do funkcji $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ($f\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in A$ zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{tzn.} \qquad \forall_{x\in A}\forall_{\varepsilon>0}\exists_k\forall_{n>k}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Ciąg (f_n) jest zbieżny *jednostajnie* do funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_k\forall_{n>k}\forall_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Szereg funkcyjny jest zbieżny punktowo, jeśli jego ciąg sum częściowych jest zbieżny punktowo. Analogicznie szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie, jeśli jego ciąg sum częściowych jest zbieżny jednostajnie. ■

Różnica formalna polega na umiejscowieniu kwantyfikatora $\forall_{x\in A}$. W jej rezultacie w pierwszym przypadku liczba naturalna k może zależeć zarówno od x jak i od ε, w przypadku zbieżności jednostajnej liczba k zależy jedynie od ε. Oczywiście należy natychmiast rzecz poprzeć przykładem.

Przykład 1.

Niech $A = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ dla $0 \le x < 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$. Zatem ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji f zdefiniowanej wzorami $f(x) = 0$ dla $0 \le x < 1$ i $f(1) = 1$. Wykażemy, że ciąg ten nie jest zbieżny jednostajnie do funkcji f. Gdyby był to dla dostatecznie dużych n i wszystkich $x \in [0,1]$ musiałaby zachodzić nierówność $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}$. Mamy jednak $f_n\Big(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\Big) - f\Big(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\Big) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. ■

Jasne jest, że jeśli ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, to jest również zbieżny punktowo do tej samej funkcji f. Powyższy przykład pokazuje, że odwrotnie na ogół nie jest.

Przykład 2.

Twierdzenie Weierstrassa o przybliżaniu mówi, że każda funkcja ciągła jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów, np. wielomianów Bernsteina. ■

Warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego (jednostajny w.C.)

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists n_\varepsilon\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_k\forall_{x\in D}\,\big|f_{n+k}(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon\,. \tag{j.w.C.}$$

Tutaj (f_n) oznacza ciąg funkcji określonych na zbiorze D. ■

Twierdzenie

Ciąg funkcji (f_n) jest jednostajnie zbieżny na zbiorze D do funkcji f określonej na D wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia j.w.C. ■

Dowód pomijamy, bo jest on po prostu powtórzeniem dowodu tego twierdzenia dla ciągów liczbowych, jedyna różnica, to dopisanie wszędzie „ dla każdego $x \in D$”, czyli różnica kosmetyczna.

Kryterium Weierstrassa zbieżności szeregu funkcyjnego

Jeśli $\sum f_n$ jest szeregiem funkcji określonych na zbiorze D i istnieje szereg zbieżny $\sum a_n$ taki, że dla każdego $x \in D$ zachodzi nierówność $|f_n(x)| \leq a_n$, to szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze D.

Dowód.

Wynika to od razu z tego, że dla szeregu *zbieżnego* $\sum a_n$ spełniony jest w.C. Z tego wynika od razu, że dla każdej liczby dodatniej ε, dla dostatecznie dużych n i wszystkich k zachodzi nierówność $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} < \varepsilon$ i wobec tego dla wszystkich $x \in D$ zachodzi nierówność

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+k}(x)| < \varepsilon\,,$$

a to oznacza, że spełniony jest j.w.C. Stąd jednostajna zbieżność szeregu $\sum f_n$ na zbiorze D wynika od razu. ■

Przykład 3.

Szereg potęgowy jest zbieżny na każdym domkniętym przedziale zawartym w przedziale zbieżności.

Dowód.

Zaczniemy od części łatwiejszej. Niech $r > 0$ oznacza promień zbieżności szeregu $\sum a_n x^n$ i niech $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$. Niech $c < r$ oznacza liczbę *większą* zarówno od $|\alpha|$ jak i od $|\beta|$. Wobec tego $|a_n x^n| < |a_n| c^n$ i jednocześnie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| c^n < +\infty$, wobec tego szereg $\sum a_n x^n$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[\alpha, \beta]$. Jak widać jest to po prostu powtórka dowodu zbieżności (bezwzględnej) szeregu potęgowego wewnątrz przedziału zbieżności.

Pozostał przypadek związany z twierdzeniem Abela o ciągłości szeregu potęgowego w końcu przedziału zbieżności. Dla uproszczenia oznaczeń założymy, że promień zbieżności szeregu potęgowego równy jest 1 oraz że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Przy tych założeniach wykażemy, że szereg $\sum a_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, 1]$. Zachęcamy do sprawdzenia, np. w notatkach z pierwszego semestru (lepiej bez nich!), że wszystkie przypadki można sprowadzić do tego jednego. Niech $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_{n+k}x^{n+k} = \\
&\qquad = (s_{n+1} - s_n)x^{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1})x^{n+2} + \cdots + (s_{n+k} - s_{n+k-1})x^{n+k} = \\
&\qquad\quad = -s_n x^{n+1} + s_{n+k}x^{n+k} + (1-x)\big(s_{n+1}x^{n+1} + s_{n+2}x^{n+2} + \cdots + s_{n+k-1}x^{n+k-1}\big)\,.
\end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Dla dostatecznie dużych n i dowolnych k zachodzą nierówności $|s_n| < \varepsilon$, $|s_{n+1}| < \varepsilon$, $|s_{n+2}| < \varepsilon$, $\ldots$, $|s_{n+k}| < \varepsilon$. Stąd, z tego, że $0 \leq x \leq 1$ i z poprzednich równości wynika, że $\big| -s_n x^{n+1}\big| < \varepsilon$, $\big|s_{n+k}x^{n+k}\big| < \varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\Big|(1-x)\big(s_{n+1}x^{n+1} + s_{n+2}x^{n+2} + \cdots + s_{n+k-1}x^{n+k-1}\big)\Big| &\leq \varepsilon(1-x)\big(x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots + x^{n+k-1}\big) = \\
&= \varepsilon\big(x^{n+1} - x^{n+k}\big) < \varepsilon
\end{aligned}$$

i wobec tego $\big|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_{n+k}x^{n+k}\big| < 3\varepsilon$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu

$\sum a_n x^n$ na przedziale $[0,1]$. ■

Twierdzenie Abela –Dirichleta dla jednostajnej zbieżności

Załóżmy, że funkcje f_n i g_n, $n = 0,1,2,\ldots$ są określone na zbiorze D i że dla każdego $x \in D$ ciąg liczbowy $(f_n(x))$ jest nierosnący, $f_n(x) \geq 0$. Jeśli spełnione jest jedno z dwóch założeń:

(i) szereg $\sum g_n$ jest zbieżny jednostajnie na D a funkcja f_1 jest ograniczona,

(ii) sumy szeregu $\sum g_n$ są ograniczone a ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji zerowej,

to szereg $\sum f_n g_n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze D.

Dowód.

Ten dowód to w zasadzie powtórka dowodu jednostajnej zbieżności szeregu potęgowego. Przyjmijmy, że $s_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_n(x)$. Wtedy

$$\big|f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + f_{n+2}(x)g_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)g_{n+k}(x)\big| \leq \big|f_{n+1}(x)s_n(x)\big| +$$
$$+\big|(f_{n+1}(x)-f_{n+2}(x))s_{n+1}(x)+(f_{n+2}(x)-f_{n+3}(x))s_{n+2}(x)+\cdots+(f_{n+k-1}(x)-f_{n+k}(x))s_{n+k-1}(x)\big|+$$
$$+\big|f_{n+k}(x)s_{n+k}(x)\big|$$

Jeśli spełnione jest którekolwiek z założeń (i), (ii) to $f_{n+1}s_n \rightrightarrows 0$, $\sup\limits_k f_{n+k}s_{n+k} \rightrightarrows 0$ i wreszcie

$$\big|(f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x))s_{n+1}(x) + (f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x))s_{n+2}(x) + \cdots + (f_{n+k-1}(x) - f_{n+k}(x))s_{n+k-1}(x)\big| \leq$$
$$\leq \Big(|f_{n+1} - f_{n+2}||s_{n+1}| + |f_{n+2} - f_{n+3}||s_{n+2}| + \cdots + |f_{n+k-1} - f_{n+k}||s_{n+k-1}|\Big) \leq$$
$$\leq \Big(|f_{n+1} - f_{n+2}| + |f_{n+2} - f_{n+3}| + \cdots + |f_{n+k-1} - f_{n+k}|\Big) \sup_i |s_{n+i}| = \Big(|f_{n+1} - f_{n+k}|\Big) \sup_i |s_{n+i}| \rightrightarrows 0$$

Oczywiście ostatnia równość to jedyne miejsce, w którym wykorzystywana jest monotoniczność ciągu (f_n). Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie to w jawny sposób nie pojawiło się na wykładzie, stanowi ono niezłą podstawę do zadania pytania na egzaminie ustnym: łatwe uogólnienie twierdzenia Abela – Dirichleta na przypadek szeregu funkcyjnego.

Jedno z poniższych twierdzeń Dini'ego zostało udowodnione na wykładzie a drugie nie.

Twierdzenie o jednostajnej zbieżności ciągu funkcji monotonicznych

Jeśli funkcje f_n, $n = 0,1,2,\ldots$ są monotoniczne, ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji *ciągłej* f na przedziale domkniętym (zbiorze zwartym, tj. takim, ze z każdego ciągu punktów tego zbioru można wybrać podciąg zbieżny do granicy będącej elementem tego zbioru), to ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie.

Twierdzenie o jednostajnej zbieżności ciągu monotonicznego funkcji ciągłych

Jeśli ciąg funkcji ciągłych (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji *ciągłej* f na przedziale domkniętym (zbiorze zwartym) i dla każdego x ciąg $(f_n(x))$ jest monotoniczny, to $f_n \rightrightarrows f$.

Dowód twierdzenia o zbieżności jednostajnej ciągu funkcji monotonicznych.

Załóżmy, że $\varepsilon > 0$. Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym, więc jest ciągła jednostajnie. Istnieje więc liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x - y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Niech punkty $x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k$ będą tak wybrane, że $x_i - x_{i-1} < \delta$, x_0 jest lewym końcem dziedziny funkcji f, a x_k – prawym. Ponieważ ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji f, więc dla dostatecznie dużych n zachodzi $k+1$ nierówności $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. Bez straty ogólności można założyć, że funkcje f_1, $f_2, \ldots$ są niemalejące: w ciągu (f_n) musi wystąpić nieskończenie wiele funkcji niemalejących lub nieskończenie wiele funkcji nierosnących, wystarczy oczywiście rozpatrywać jeden z tych przypadków. Funkcja graniczna f musi również być niemalejąca. Jeśli x jest dowolnym punktem przedziału $[x_0, x_k]$, to dla pewnego i zachodzi nierówność $x_{i-1} \le x \le x_i$. Wobec tego $f(x_{i-1}) \le f(x) \le f(x_i)$ oraz $f_n(x_{i-1}) \le f_n(x) \le f_n(x_i)$. Zachodzą też nierówności $f(x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{3} \le f_n(x_{i-1})$ oraz $f_n(x_i) \le f(x_i) + \frac{\varepsilon}{3}$. Stąd wynika, że obie liczby $f(x)$ i $f_n(x)$ znajdują się w przedziale $\big(f(x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{3}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{3}\big)$, więc odległość między nimi jest mniejsza od jego długości, która jest mniejsza od liczby ε. Dowód został zakończony. ■

Dowód twierdzenia o zbieżności jednostajnej ciągu monotonicznego funkcji ciągłych.
Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa oraz że ciąg (f_n) jest niemalejący. Niech D oznacza dziedzinę rozpatrywanych funkcji. Istnieje więc liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego naturalnego n istnieje $m > n$ oraz x_m, dla których $|f_m(x_m) - f(x_m)| \ge \varepsilon$. Ponieważ ciąg (f_n) jest niemalejący, więc dla każdego x zachodzi nierówność $f_n(x) \le f(x)$. Wobec tego musi być spełniona nierówność $f_m(x_m) \le f(x_m) - \varepsilon$. Z ciągu (x_m) można wybrać podciąg zbieżny do granicy $p \in D$, bo dziedzina funkcji jest przedziałem domkniętym (zbiorem zwartym). By nie komplikować oznaczeń przyjmijmy, że ciąg (x_m) jest zbieżny do p. Jeśli $j \le m$, to mamy $f_j(x_m) \le f_m(x_m) \le f(x_m)$. Stąd i z ciągłości funkcji f_j w punkcie p wynika, że $f_j(p) = \lim\limits_{m\to\infty} f_j(x_m) \le \lim\limits_{m\to\infty} f(x_m) - \varepsilon = f(p) - \varepsilon$. Otrzymana nierówność przeczy oczywiście temu, że $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(p) = f(p)$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie o ciągłości granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego
Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ i wszystkie funkcje f_1, $f_2, \ldots$ są ciągłe w punkcie p, to również funkcja f jest ciągła w punkcie p.

Dowód.
Załóżmy, że $\varepsilon > 0$. Dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n, dla wszystkich x zachodzi nierówność $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Wybierzmy jedną dostatecznie dużą liczbę naturalną n. Ponieważ funkcja f_n jest ciągła w punkcie p, więc istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x - p| < \delta$, to zachodzi $|f_n(x) - f_n(p)| < \varepsilon$. Mamy więc

$$|f(x) - f(p)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(p)| + |f_n(p) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Oznacza to, że funkcja graniczna f jest ciągła w punkcie p. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie o całkowalności granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego
Jeśli funkcje f_1, $f_2, \ldots$ są całkowalne w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ i $f_n \rightrightarrows f$, to również funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna i zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dowód.

Niech D_n będzie zbiorem punktów nieciągłości funkcji f_n. Jest on zbiorem miary 0, bo funkcja f_n jest całkowalna w sensie Riemanna. Wobec tego zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ jest też miary 0, bo suma przeliczalnej rodziny zbiorów miary 0 jest również zbiorem miary 0. Jeśli $p \in [a,b] \setminus D$, to wszystkie funkcje f_1, f_2,... są ciągłe w punkcie p, zatem – na mocy twierdzenia o ciągłości granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego – funkcja f również jest ciągła w tym punkcie. Ciąg (f_n) spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, zatem dla dostatecznie dużych liczb naturalnych k, n zachodzi nierówność $|f_n(x) - f_k| < 1$, wobec tego $\varepsilon \geq \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f_k(x)| = |f(x) - f_k(x)$. Ponieważ funkcja f_k jest całkowalna w sensie Riemanna, więc jest ograniczona. Wobec tego również funkcja f jest ograniczona: $|f(x)| \leq |f_k(x)| + 1$. Wykazaliśmy więc, że funkcja f jest ograniczona i że jej zbiór punktów nieciągłości ma miarę 0. f jest więc całkowalna w sensie Riemanna. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Niech m będzie tak dużą liczbą naturalną, że $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ dla każdego $x \in [a,b]$. Dla dostatecznie drobnego podziału $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ przedziału $[a,b]$ zachodzą nierówności $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1})\right| < \varepsilon$ i $\left|\int_a^b f_m(x)\,dx - \sum\limits_{j=1}^{n} f_m(x_j)(x_j - x_{j-1})\right| < \varepsilon$. Wobec tego

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_m(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1})\right| +$$
$$+\left|\sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} f_m(x_j)(x_j - x_{j-1})\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} f_m(x_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f_m(x)\,dx\right| <$$
$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} \big|f(x_j) - f_m(x_j)\big|(x_j - x_{j-1}) + \varepsilon < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) + \varepsilon = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Z tej nierówności wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Dowód został zakończony. ■

Następne twierdzenie różni się tym od poprzednich, że zakładamy jednostajną zbieżność ciągu pochodnych zamiast funkcji, bo inaczej nic sensownego wykazać nie można.

Twierdzenie o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego

Jeśli funkcje f_1, f_2, ...są określone na przedziale *ograniczonym* I, różniczkowalne i $f_n' \rightrightarrows g$, ciąg (f_n) jest zbieżny w punkcie p, to ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f i zachodzi równość $f'(x) = g(x)$ dla każdego $x \in I$.

Dowód.

Wykażemy najpierw, że ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje n_ε takie, że dla każdych $n, k > n_\varepsilon$ i dowolnego x zachodzą nierówności $|f_n'(x) - f_k'(x)| < \varepsilon$ oraz $\big|f_n(p) - f_k(p)\big| < \varepsilon$. Wobec tego

$$|f_n(x) - f_k(x)| \leq \Big|f_n(x) - f_k(x) - \big(f_n(p) - f_k(p)\big)\Big| + \big|f_n(p) - f_k(p)\big| =$$
$$= \big|f_n'(c_x) - f_k'(c_x)\big|\big|x - p\big| + \big|f_n(p) - f_k(p)\big| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Twierdzenie Lagrange'a zostało tu zastosowane do funkcji $f_n - f_k$! Ciąg $\big(f_n\big)$ jest więc ciągiem Cauchy'ego, zatem jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji f. Funkcja ta jest ciągła jako granica ciągu funkcji ciągłych zbieżnego jednostajnie. Wykażemy, że $f'(x) = g(x)$ dla każdego x. Stosując znów twierdzenie Lagrange'a do różnicy $f_n - f_k$ otrzymujemy dla dostatecznie dużych n i k nierówność

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n'(x) - \left(\frac{f_k(x+h)-f_k(x)}{h} - f_k'(x)\right)\right| = \left|f_n'(c_{n,k}) - f_n'(x) - \left(f_k'(c_{n,k}) - f_k'(x)\right)\right| < \varepsilon$$

– bowiem dla dostatecznie dużych n,k i dowolnego t zachodzi nierówność $\left|f_n'(t) - f_n'(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, którą można zastosować w przypadku $t = c_{n,k}$ oraz $t = x$. Ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$ i $\lim\limits_{k\to\infty} f_k'(t) = g(t)$, więc dla dostatecznie dużego n wszystkich $x \in I$ i wszystkich takich h, że $x+h \in I$, zachodzi nierówność $\left|\dfrac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n'(x) - \left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)(x)\right)\right| \le \varepsilon$. Dla ustalonego, dostatecznie dużego n i ustalonego x istnieje $\delta > 0$ taka, że $0 < |h| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n'(x)\right| < \varepsilon$, jeśli tylko $x+h \in I$. Stąd wynika, że $0 < |h| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| < 2\varepsilon$ dla tego ustalonego x, jeśli $x+h \in I$. Oznacza to, że $g(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, a to oznacza, że $g(x) = f'(x)$. Dowód został zakończony. ■

Wykażemy jeszcze jedno twierdzenie mówiące o istnieniu podciągów zbieżnych jednostajnie.

Definicja zbioru zwartego.

1. Zbiór $K \subset \mathbb{R}$ nazywany jest zwartym, jeśli z każdego ciągu (x_n) punktów zbioru K można wybrać podciąg (x_{n_k}) zbieżny do granicy $g \in K$.
2. Zbiór $\mathcal{F}$ złożony z funkcji ciągłych określonych na zbiorze K nazywamy zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu (f_n) funkcji ze zbioru $\mathcal{F}$ można wybrać podciąg (f_{n_k}) zbieżny jednostajnie do funkcji $g \in \mathcal{F}$. ■

Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że każdy przedział domknięty jest zbiorem zwartym. Przedział $[0,2)$ zwarty nie jest bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = 2 \notin [0,2)$, więc wszystkie podciągi ciągu $\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ są zbieżne do liczby 2, więc ich wspólna granica znajduje się *poza* $[0,2)$. Prosta $\mathbb{R}$ nie jest zbiorem zwartym, bowiem z ciągu (n) nie można wybrać podciągu zbieżnego do liczby rzeczywistej. Zbiór Cantora $\mathbb{C}$ jest zwarty, bowiem z ciągu x_n punktów zbioru $\mathbb{C}$, więc ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny; granica tego podciągu musi leżeć w przedziale $[0,1]$, bo wszystkie wyrazy znajdują się w tym przedziale; nie może się znaleźć ona w przedziale $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, bo w tym przedziale *otwartym* w ogóle nie ma wyrazów ciągu (x_n); analogicznie nie może znaleźć się ona w przedziale $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, ani w przedziale $(\frac{7}{9}, \frac{8}{8})$; proces wykluczania przedziałów, w których granica mogłaby się znaleźć, można kontynuować; wobec tego może ona znaleźć się jedynie w zbiorze Cantora. Te rozumowania można łatwo uogólnić i otrzymać następującą charakteryzację podzbiorów zwartych prostej:

Twierdzenie o zwartych podzbiorach prostej

Zbiór $K \subset \mathbb{R}$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy,gdy jest on ograniczony (tzn. istnieje liczba $d \ge 0$ taka, że $|x| \le d$ dla każdego $x \in K$) i domknięty (tzn. jeśli $x_n \in K$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g \in \mathbb{R}$, to $g \in K$).

Dowód.

Załóżmy najpierw, że zbiór K jest zwarty. Jeśli zbiór K nie jest ograniczony, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje $x_n \in K$ takie, że $|x_n| \geq n$. Z ciągu (x_n) nie można oczywiście wybrać podciągu ograniczonego, więc zbieżnego do granicy skończonej. Jeśli zbiór K nie jest domknięty, to zawiera ciąg (x_n), którego granica g znajduje się poza K. Wszystkie podciągi ciągu (x_n) są więc zbieżne go $g \notin K$. Dowodzi to, że zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}$ jest domknięty i ograniczony.

Teraz załóżmy, że zbiór K jest domknięty i ograniczony i że wyrazy ciągu (x_n) są jego elementami. Z wyrazów ciągu ograniczonego (x_n) można wybrać podciąg zbieżny (x_{n_k}) (twierdzenie Bolzano–Weierstrassa). Jego granica musi się znajdować w zbiorze K, bowiem zbiór ten jest z założenia domknięty, a wyrazy ciągu (x_{n_k}) są elementami K. Wobec tego zbiór K jest zwarty. ■

Twierdzenie to w takiej dosłownie wersji nie jest prawdziwe w przypadku zbiorów, których elementami są funkcja ciągłe. Niech bowiem $\mathcal{F} = \{f_n\colon \quad n = 1,2,3,\ldots\}$, $f_n(x) = \sin\left(2^n x\right)$. Jasne jest, że jeśli $n \neq k$, to $\sup\limits_{x\in K} |f_n(x) - f_k(x)| \geq 1$, zatem z ciągu (f_n) nie można wybrać podciągu zbieżnego jednostajnie.

Definicja jednakowej jednostajnej ciągłości.

Funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x_1 - x_2| < \delta$ to dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$ zachodzi nierówność $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. ■

Liczba δ dobrana do ε jest więc taka sama dla wszystkich funkcji z rodziny $\mathcal{F}$. W przykładzie poprzedzającym definicję mamy do czynienia z rodziną funkcji, które nie są jednakowo jednostajnie ciągłe. Wykażemy teraz twierdzenie charakteryzujace zbiory zwarte, których elementami są funkcje ciągłe określone na zbiorze zwartym $K \subset \mathbb{R}$ ($K \subset \mathbb{C}$).

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego*

Zbiór $\mathcal{F}$ złożony z funkcji ciągłych określonych na zbiorze zwartym K jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równocześnie następujące warunki:

A-A1. istnieje liczba $M \geq 0$ taka, że dla każdego $x \in K$ i każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$ zachodzi nierówność $|f(x)| \leq M$, czyli funkcje ze zbioru $\mathcal{F}$ są wspólnie ograniczone;

A-A2. funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe, tzn.

$$(\forall_{\varepsilon>0})(\exists_{\delta>0})(\forall_{f\in\mathcal{F}})(\forall_{x_1,x_2\in K})\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon;$$

A-A3. rodzina $\mathcal{F}$ jest domknięta, tzn. jeśli $(\forall_n) f_n \in \mathcal{F}$ i $f_n \rightrightarrows f$ na zbiorze K, to $f \in \mathcal{F}$.

Dowód.

Załóżmy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest zwarta oraz że funkcje z $\mathcal{F}$. nie są wspólnie ograniczone. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje więc funkcja $f_n \in \mathcal{F}$ taka, że $\sup\limits_{x\in K} |f_n(x)| \geq n$. Z ciągu (f_n) nie można wybrać podciągu zbieżnego jednostajnie do funkcji ciągłej f, bo funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest

* Wg. mojej wiedzy każdy z dwóch panów udowodnił jedną implikację.

ograniczona (twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów) a z nierówności $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ wynika, że $|f_n(x)| < |f(x)| + \varepsilon$, zatem $n = \sup_{x \in K} |f_n(x)| \le \sup_{x \in K} |f(x)| + \varepsilon$, co jest niemożliwe. Wobec tego funkcje te muszą być wspólnie ograniczone.

Załóżmy teraz, że rodzina $\mathcal{F}$ nie jest domknięta, tzn. że istnieje ciąg (f_n) zbieżny jednostajnie do funkcji $f \notin \mathcal{F}$. Wtedy z ciągu f_n nie można wybrać pociągu zbieżnego jednostajnie do granicy należącej do $\mathcal{F}$, bo wszystkie podciągi zbieżne jednostajnie tego ciągu są zbieżne jednostajnie do $f \notin \mathcal{F}$. Dowodzi to, że rodzina $\mathcal{F}$ musi być domknięta. Te dwa fragmenty rozumowania niczym się nie różnią od dowodów w twierdzeniu o podzbiorach zwartych prostej.

Ostatnia rzecz, którą należy wykazać to jednakowa jednostajna ciągłość funkcji z rodziny $\mathcal{F}$. Załóżmy, że funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ nie są jednakowo jednostajnie ciągłe. Oznacza to, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje funkcja f_n oraz punkty x_n, y_n takie, że $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$. Wybieramy podciąg zbieżny z ciągu (x_n). Nie zastępujemy x_n przez x_{n_l}, by nie komplikować oznaczeń, ale w dalszym ciągu rozpatrywane są odpowiednie podciągi ciągu (y_n) i ciągu (f_n). Ze zbieżności ciągu (x_n) do $\hat{x} \in K$ wynika, że również $\lim_{n\to\infty} y_n = \hat{x}$. Wybieramy teraz podciąg zbieżny jednostajnie z ciągu (f_n) do funkcji $f \in \mathcal{F}$. Znów zachowujemy oznaczenia. Teraz mamy $f_n \rightrightarrows f$, czyli $\sup|f_n - f| \to 0$ oraz $x_n \to \hat{x}$, $y_n \to \hat{x}$. Mamy więc

$$\varepsilon \le |f_n(x_n) - f_n(y_n)| \le |f_n(x_n) - f(\hat{x})| + |f(\hat{x}) - f_n(y_n)| \le 2 \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 .$$

Jest to niemożliwe, zatem funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ muszą być jednakowo jednostajnie ciągłe.

Założymy teraz, że rodzina $\mathcal{F}$ spełnia warunki A-A1, A-A2 i A-A3. Niech $f_n \in \mathcal{F}$. Wykażemy, że z ciągu (f_n) można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie. Istnieje zbiór przeliczalny $D \subset K$ taki, że każdy punkt zbioru K jest granicą pewnego ciągu punktów z D (D jest gęsty w zbiorze K, w przypadku, gdy K jest przedziałem zbiór D może się składać np. ze wszystkich liczb wymiernych z tego przedziału). Oznaczmy elementy zbioru D przez x_1, x_2, ... Z ciągu ograniczonego $(f_n(x_1))$ można wybrać podciąg zbieżny $(f_{1,n}(x_1))$, tzn. z ciągu (f_n) można wybrać podciąg $(f_{1,n})$ w taki sposób, że ciąg $(f_{1,n}(x_1))$ jest zbieżny. Z ciągu $(f_{1,n})$ można z kolei wybrać podciąg $(f_{2,n})$ taki, że ciąg $(f_{2,n}(x_2))$ jest zbieżny. Ponieważ podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny, więc ciąg $(f_{2,n}(x_1))$ jest zbieżny. Teraz z ciągu $(f_{2,n})$ wybieramy podciąg $(f_{3,n})$ tak, by ciąg $(f_{3,n}(x_3))$ był zbieżny. Wobec tego zbieżne są ciągi $(f_{3,n}(x_1))$, $(f_{3,n}(x_2))$, $(f_{3,n}(x_3))$. Tę procedurę można kontynuować, czyli z otrzymanego ciągu funkcji wybierać podciąg zbieżny w następnym punkcie zbioru D. Teraz zajmiemy się ciągiem $f_{n,n}$. Jego wyrazy, z wyjątkiem pierwszych $n-1$ są wyrazami, na ogół niekolejnymi, ciągu $f_{n,1}, f_{n,2}, f_{n,3}, \ldots$. Wobec tego ciąg $(f_{n,n}(x_j))$ jest zbieżny dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Udało się nam więc wybrać z ciągu (f_n) podciąg $(f_{n,n})$, który jest zbieżny w każdym punkcie zbioru gęstego D. Wykażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na zbiorze zwartym K. Niech ε oznacza liczbę dodatnią. Istnieje wtedy $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x - y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$. Istnieje liczba m, zależna od δ taka, że dla każdego punktu $x \in K$ istnieje $j(x) \in \{1, 2, \ldots, m\}$ taka, że $|x - x_{j(x)}| < \delta$. Istnieje też liczba

n_ε taka, że jeśli $k, l > n_\varepsilon$, to $|f_{k,k}(x_j) - f_{l,l}(x_j)| < \varepsilon$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Mamy zatem

$$|f_{k,k}(x) - f_{l,l}(x)| \leq |f_{k,k}(x) - f_{k,k}(x_{j(x)})| + |f_{k,k}(x_{j(x)}) - f_{l,l}(x_{j(x)})| + |f_{l,l}(x_{j(x)}) - f_{l,l}(x)| < 3\varepsilon$$

Wykazaliśmy więc, że jest spełniony jednostajny warunek Cauchy'ego, co oznacza, że ciąg $f_{n,n}$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji f, która ze względu na domkniętość zbioru $\mathcal{F}$ jest jego elementem. Dowód zwartości rodziny $\mathcal{F}$ został zakończony. ■