Definicja wielomianu

Wielomianem nazywamy funkcję $w\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lub $w\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ taką, że istnieją liczby a_0, $a_1, \ldots, a_n$ takie, że dla każdego argumentu x zachodzi równość $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Liczby a_0, $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu w. ■

Lemat.

Jeżeli jedyną wartością wielomianu w jest liczba 0, to wszystkie jego współczynniki są równe 0.

Dowód. $k!a_k = w^{(k)}(0) = 0$. ■

Wniosek.

Jeśli v i w są wielomianami i $w(x) = v(x)$ dla każdego x, to wielomiany w i v mają równe współczynniki. ■

Zadanie.

Wykazać, że jeśli $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx_j^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nx_j^n$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots$, $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = 0$ i $x_j \neq 0$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots$, to $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. ■

Definicja stopnia wielomianu

Jeśli $w(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ i $a_n \neq 0$, to liczbę naturalną n nazywamy stopniem wielomianu w. Jeśli wszystkie współczynniki wielomianu w są równe 0, to stopniem wielomianu w nazywamy symbol $-\infty$. Stopień wielomianu w oznaczamy symbolem $\deg(w)$ ■

Z definicji stopnia wielomianu wynika od razu, że jeśli w i v są dowolnymi wielomianami, to $\deg(w \cdot v) = \deg(w) + \deg(v)$ oraz że $\deg(w + v) \leq \max(\deg(w), \deg(v))$.

Twierdzenie o dzieleniu z resztą

Dla dowolnych wielomianów w i v, $\deg(v) \geq 0$ istnieje dokładnie jedna para wielomianów q, r taka, że $w = qv + r$ i $\deg(r) < \deg(v)$.

Dowód. Jeśli w jest wielomianem stopnia mniejszego niż wielomian v, to możemy przyjąć $q = 0 = r$. Załóżmy teraz, że wielomian w ma stopień nie mniejszy niż wielomian v oraz że teza zachodzi dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego niż $\deg(w)$. Niech $w(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $v(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$, $a_n \neq 0 \neq b_k$. Niech $w_1(x) = w(x) - \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}v(x)$. Jasne jest, że stopień wielomianu w_1 jest mniejszy niż $n = \deg(w)$. Wobec tego istnieją wielomiany q_1 i r takie, że $w_1 = q_1v + r$ przy czym $\deg(r) < \deg(v)$. Przyjmując $q(x) = q_1(x) + \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}$ otrzymujemy równość $w(x) = q(x)v(x) + r(x)$. Trzeba jeszcze wykazać, ze jeśli $w = qv + r = \tilde{q}v + \tilde{r}$ i $\deg(\tilde{r}), \deg(r) < \deg(v)$, to $\tilde{q} = q$ i $\tilde{r} = r$. Mamy równość $\tilde{r} - r = qv - \tilde{q}v$, zatem $\deg((q - \tilde{q})v) = \deg(\tilde{r} - r) < \deg(v)$, a ponieważ $\deg((q - \tilde{q})v) = \deg(q - \tilde{q}) + \deg(v)$, więc $\deg(q - \tilde{q}) < 0$, zatem $0 = q - \tilde{q}$, więc również $r = \tilde{r}$. Dowód został zakończony. ■

Definicja największego wspólnego dzielnika dwóch wielomianów

Największym wspólnym dzielnikiem wielomianów w i v nazywamy wielomian d najwyższego stopnia spośród tych, które są jednocześnie dzielnikami w i v, którego współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej równy jest 1 (tj. wielomian unormowany). Oznaczenie: $\mathrm{nwd}(w, v)$. ■

Twierdzenie podstawowe o największym wspólnym dzielniku

Jeśli co najmniej jeden z wielomianów w i v jest różny od 0, to istnieje dokładnie jeden największy wspólny dzielnik, każdy inny wspólny dzielnik wielomianów w i v jest dzielnikiem $\mathrm{nwd}(w, v)$, istnieją wielomiany p, q, takie że $\mathrm{nwd}(w, v) = pv + qw$.

Dowód.

Rozważmy zbiór $\mathcal{P}$ wszystkich niezerowych wielomianów postaci $pv+qw$. Oczywiście $w, v \in \mathcal{P}$ (o ile ich stopnie są nieujemne): $w = 1 \cdot w + 0 \cdot v$, $v = 0 \cdot w + 1 \cdot v$. Wobec tego zbiór $\mathcal{P}$ ma co najmniej jeden element. Niech $d \in \mathcal{P}$ będzie wielomianem unormowanym najniższego stopnia spośród należących do $\mathcal{P}$.*. Wykażemy, że $d = q_0 w + p_0 v$ jest wspólnym dzielnikiem obu wielomianów w i v. Niech $w = qd + r$ dla pewnych wielomianów q, r, przy czym $\deg(r) < \deg(d)$. Wtedy $r = (1 - qq_0)w - p_0 v$. Ponieważ $\deg(r) < \deg(d)$, więc $r = 0$, co oznacza, że d jest dzielnikiem wielomianu w. Ten sam argument przekonuje nas, że wielomian d jest dzielnikiem wielomianu v. Jasne jest też, że każdy wspólny dzielnik wielomianów w, v jest dzielnikiem $p_0 v + q_0 w = d$, co kończy dowód twierdzenia. ■

Definicja dzielnika właściwego

Dzielnikiem właściwym wielomianu w nazywamy każdy jego dzielnik stopnia *dodatniego* i jednocześnie mniejszego niż $\deg(w)$. ■

Definicja wielomianu nierozkładalnego

Wielomianem nierozkładalnym (czyli pierwszym**) nazywamy wielomian, który nie ma dzielników właściwych. ■

Definicja wielomianów względnie pierwszych

Wielomiany v i w są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{nwd}(w, v) = 1$ ■

Należy sobie uświadomić, że przynajmniej jeden z tych wielomianów musi być niezerowy, bo musi istnieć $\mathrm{nwd}(w, v)$.

Lemat podstawowy o podzielności

Jeśli wielomiany u i v są względnie pierwsze i u jest dzielnikiem vw, to u jest dzielnikiem w.

Dowód.

Istnieją wielomiany p, q takie, że $1 = pu + qv$. Wobec tego $w = upw + qvw$. u jest oczywiście dzielnikiem iloczynu upv i iloczynu qvw (z założenia), zatem jest dzielnikiem ich sumy, czyli wielomianu w. ■

Z lematu podstawowego o podzielności wynika, że każdy wielomian można przedstawić i to jednoznacznie w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych, czyli

* Jeśli do $\mathcal{P}$ należy wielomian stopnia α, to należy również wielomian unormowany stopnia α

** termin angielski: prime ma znaczenie pierwszy, ale jako najważniejszy, np. prime minister.

Twierdzenie o jednoznaczności rozkładu

Dla każdego wielomianu unormowanego w stopnia większego od 0 istnieją wielomiany nierozkładalne, unormowane v_1, v_2,…, v_k takie, że $w = v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k$ przy czym jeśli $w = \tilde{v}_1 \cdot \tilde{v}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{v}_l$. jest innym przedstawieniem w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych, unormowanych, to $l = k$ i po ewentualnej zmianie numeracji czynników zachodzą równości $\tilde{v}_j = v_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$.

Dowód.

Jeśli wielomian jest rozkładalny, to ma dzielnik właściwy, więc może być przedstawiony w postaci iloczynu dwóch wielomianów niższego stopnia. Wielomiany stopnia pierwszego są oczywiście nierozkładalne, więc jasne jest (prosta indukcja względem stopnia wielomianu), że każdy wielomian można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych. Jednoznaczność wynika łatwo z tego, że jeśli wielomian nierozkładalny dzieli iloczyn dwóch wielomianów, to dzieli jeden z nich (lemat podstawowy o podzielności): jeśli $\tilde{v}_1$ jest dzielnikiem iloczynu $v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k = v_1 \cdot (v_2 \cdot \ldots \cdot v_k)$, więc $\tilde{v}_1$ jest dzielnikiem v_1 lub dzielnikiem $v_2 \cdot \ldots \cdot v_k$, jeśli jest dzielnikiem v_1, to ponieważ oba są unormowane i nierozkładalne, więc $v_1 = \tilde{v}_1$, jeśli nie, to jest dzielnikiem iloczynu $v_2 \cdot \ldots \cdot v_k$, czyli iloczynu krótszego o jeden czynnik od iloczynu wyjściowego, prosta indukcja przekonuje nas o tym, że wtedy $\tilde{v}_1$ musi być równy jednemu z wielomianów $v_2, v_3, \ldots, v_k$, a to oznacza, że każdy z wielomianów $\tilde{v}_j$ jest jednym z wielomianów $v_1, \ldots, v_k$, co kończy dowód jednoznaczności. ■

Wypada stwierdzić, że według zasadniczego twierdzenia algebry jedynymi nierozkładalnymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych są wielomiany stopnia pierwszego i te wielomiany stopnia drugiego, które nie mają pierwiastków rzeczywistych. Inaczej jest w przypadku wielomianów o współczynnikach zespolonych – każdy taki wielomian można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego, zatem jedynie wielomiany stopnia pierwszego są w tym przypadku nierozkładalne. Jeszce inaczej jest w przypadku wielomainów o współczynnikach wymiernych. W tym przypadku jest wiele wielomianów, których nie można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia niższego niż ich własny. Można np. wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to wielomianu $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1$ nie można przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów o współczynnikach wymiernych stopnia mniejszego niż $p - 1$. Nie jest to trudne, ale to nie jest tematem naszych rozważań, zostawiamy to ambitnym, zainteresowanym studentom, inni zaczekają na wykład z algebry. W każdym razie zaznaczyć należy, że kwestia rozkładalności zależna jest tego, jakie współczynniki dopuszczamy w rozkładach.

Definicja funkcji wymiernej

Funkcją wymierną nazywać będziemy funkcję, którą można przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów. Jej dziedziną będzie zbiór tych liczb rzeczywistych (lub zespolonych), dla których mianownik ilorazu zapisanego w postaci nieskracalnej jest różny od 0. ■

Wypada od razu stwierdzić, że w takiej sytuacji licznik i mianownik nie mają wspólnych pierwiastków (w zbiorze dopuszczalnych współczynników). Definicja ta nie jest całkiem zgodna z używanymi w standardowych podręcznikach szkolnych, których autor tego tekstu nie jest w stanie pojąć.

Definicja ułamków prostych

Ułamkiem prostym nazywamy funkcję wymierną, której mianownik jest potęgą wielomianu nierozkładalnego, a licznik wielomianem stopnia niższego niż wielomian nierozkładalny, którego potęgą jest mianownik. ■

Ułamkami prostymi są więc np. funkcje $\frac{2}{x+1}$, $\frac{x+7}{x^2+x+1}$, $\frac{x-13}{(x^2+5)^{37}}$, $\frac{23}{(x-9)^{100}}$. Funkcje $\frac{x-3}{x-1}$, $\frac{x+1000}{x^2+3x+2}$ ułamkami prostymi nie są. Jasne jest, że ułamki proste są nieskracalne.

Twierdzenie o przedstawianiu funkcji wymiernej w postaci sumy ułamków prostych

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych. Przedstawienie takie jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności składników, jeśli każdy mianownik może wystąpić tylko raz, a wszystkie liczniki są różne od 0.

Dowód.

Jasne jest, że każdą funkcję wymierną $\frac{L}{M}$ przedstawić można w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej, której licznik jest wielomianem stopnia niższego niż mianownik – wystarczy podzielić licznik z resztą przez mianownik: $L = QM + R$, wtedy $\frac{L}{M} = Q + \frac{R}{M}$. Druga obserwacja to stwierdzenie, że jeśli mianownik M jest iloczynem dwóch wielomianów względnie pierwszych $M = M_1M_2$, to można funkcję wymierną zapisać w postaci sumy funkcji wymiernych o mianownikach M_1 i M_2. Wystarczy skorzystać z twierdzenia podstawowego o największym wspólnym dzielniku: istnieją wielomiany L_1 i L_2 takie, że $1 = L_1M_1 + L_2M_2$, zatem $\frac{R}{M} = \frac{R(L_1M_1 + L_2M_2)}{M_1M_2} = \frac{RL_2}{M_1} + \frac{RL_1}{M_2}$. Te uwagi pozwalają na stwierdzenie, że funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernych, których mianowniki mają stopnie większe niż liczniki i nie można ich przedstawić w postaci iloczynu wielomianów względnie pierwszych (stosujemy indukcję względem stopnia mianownika). Jeśli wielomianu nie można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów względnie pierwszych, to musi być on potęgą wielomianu nierozkładalnego: w rozkładzie na czynniki nierozkładalne może występować tylko jeden czynnik, oczywiście może on wystąpić wielokrotnie. Następnie można zmniejszać stopień licznika dzieląc go z resztą przez nierozkładalny czynnik mianownika. To kończy to nieco gawędziarskie uzasadnienie istnienia rozkładu. Kolej na jednoznaczność. Załóżmy, że $w_1 + \frac{p_1}{q_1} = w_2 + \frac{p_2}{q_2}$, gdzie w_1, w_2, p_1, p_2, q_1, q_2 są wielomianami przy czym $\deg(p_i) < \deg(q_i)$ dla $i = 1, 2$. W tej sytuacji mamy $(w_1 - w_2)q_1q_2 = p_2q_1 - p_1q_2$. Oczywiście $\deg(q_1q_2) > \deg(p_2q_1 - p_1q_2)$, zatem $\deg(w_1 - w_2) < 0$, ale to oznacza, że $w_1 - w_2 = 0$, czyli $w_1 = w_2$. Stąd automatycznie wnioskujemy, że $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$. Wobec tego możemy się zajmować jedynie funkcjami wymiernymi, których mianownik ma stopień większy niż licznik. Zauważmy jeszcze, że sumując ułamki proste o różnych mianownikach i niezerowych licznikach otrzymujemy ułamek nieskracalny. Jeśli bowiem v jest wielomianem nierozkładalnym, który występuje w mianownikach rozważanych ułamków prostych, m jest największym wykładnikiem z jakim v występuje, to po sprowadzeniu sumy do wspólnego mianownika najniższego stopnia liczniki wszystkich pozostałych składników będą podzielne przez v, a tylko w tym jednym przypadku będzie inaczej. Wobec tego otrzymany ułamek nie da się skrócić przez v, a w rozkładzie mianownika na czynniki pierwsze żadne wielomiany poza występującymi w mianownikach skłądników rozpatrywanej sumy nie mogą się pojawić. Wobec tego każde dwa „oszczędne" przedstawienia jednej funkcji wymiernej muszą dać ten sam mianownik: ten który otrzymujemy zapisując ją w postaci nieskracalnej. Załóżmy teraz, że $\frac{u}{v^m} + \frac{p}{q} = \frac{\tilde{u}}{v^n} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ oraz $-\infty < \deg(u) < \deg(v)$, $-\infty < \tilde{u} < \deg(v)$, $-\infty < \deg(p) < \deg(q)$, $-\infty < \deg(\tilde{p}) < \deg(\tilde{q})$, p, q są względnie pierwsze, $\tilde{p}, \tilde{q}$ też są względnie pierwsze, wielomian q nie dzieli się przez v^m, wielomian $\tilde{q}$ jest niepodzielny przez v^n. Wtedy $m = n$ i $u = \tilde{u}$, bowiem jeśli np. $m \geq n$, to $(u - \tilde{u}v^{m-n})q\tilde{q} = (\tilde{p}q - p\tilde{q})v^m$. Niech k oznacza mniejszy z dwóch wykładników z jakimi v wchodzi w rozkład na czynniki pierwsze wielomianów q i $\tilde{q}$. Wtedy prawa strona otrzymanej równości jest podzielna przez v^{m+k}, natomiast iloczyn $q\tilde{q}$ przez tę potęgę v nie jest podzielny (ani q ani $\tilde{q}$ nie dzieli się przez v^m). Wobec tego wielomian $u - \tilde{u}v^{m-n}$ jest podzielny przez v. To jednak jest możliwe jedynie wtedy, gdy $m = n$ (bo u przez v się nie dzieli) i jednocześnie $u = \tilde{u}$ (bo stopnie u i $\tilde{u}$ są mniejsze niż $\deg(v)$). Wykazaliśmy, że przy sformułowanych założeniach $\frac{u}{v^m} = \frac{\tilde{u}}{v^n}$, więc również $\frac{p}{q} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$. Ta obserwacja pozwala na zakończenie dowodu jednoznaczności przedstawienia: zmniejszamy indukcyjnie maksymalny stopień z jakim występują potęgi wielomianów nierozkładalnych w naszej sumie ułamków prostych. ■

Uwaga. W zasadzie wykorzystywać będziemy jedynie istnienie rozkładu, ale ze względów estetycznych podaliśmy również twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na sumę ułamków prostych. Warto też dodać, że rozważane bywają również nieskończone sumy ułamków prostych. Przedstawianie funkcji w takiej postaci pozwala niejednokrotnie na zręczniejsze badanie ich własności.

C A Ł K I

Operacja odwrotna do różniczkowania nazywana jest całkowaniem. Dana funkcja traktowana jest jako pochodna pewnej funkcji, którą trzeba znaleźć. Zaczniemy od definicji.

Definicja funkcji pierwotnej czyli całki nieoznaczonej

Niech $G \subset \mathbb{R}$ będzie sumą pewnej rodziny parami rozłącznych przedziałów. Jeżeli $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją na zbiorze G, to każda funkcję $F\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, dla której równość $F'(x) = f(x)$ ma miejsce dla każdego $x \in G$ nazywamy funkcją pierwotną lub całką nieoznaczoną funkcji f. Stosujemy oznaczenie $F(x) = \int f(x)\,dx$. ■

Zauważmy, że jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to dla każdej liczby rzeczywistej C

funkcja $F+C$ też jest funkcją pierwotną funkcji f. Zachodzi

Twierdzenie o jednoznaczności funkcji pierwotnej

Jeśli P jest przedziałem, $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją a F_1 i F_2 jej funkcjami pierwotnymi, to istnieje liczba $C \in \mathbb{R}$, taka że dla każdego $x \in P$ zachodzi równość $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Teza wynika natychmiast z tego, że pochodną funkcji $F_2 - F_1$ jest funkcja tożsamościowo równa 0, więc funkcja $F_2 - F_1$ jest stała. ■

Podkreślić od razu wypada, że jeśli dziedzina nie jest przedziałem, to teza przestaje być prawdziwa. Funkcja $\ln|x|$ jest funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{x}$. Niech $F_1(x) = \ln|x|$. Niech $F_2(x) = 1 + \ln x$ dla $x > 0$ i $F_2(x) = \ln(-x)$ dla $x < 0$. Jasne jest, że $F_2'(x) = \frac{1}{x}$ dla każdego $x \neq 0$, więc F_2 jest funkcją pierwotną funkcji $\ln$, podobnie jak F_1. Funkcja $F_2 - F_1$ przyjmuje jednak dwie wartości, mianowicie 0 dla $x < 0$ oraz 1 dla $x > 0$. Nie jest więc stała, chociaż *jest stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji* f. Czasami taką funkcję nazywamy lokalnie stałą. W dalszym ciągu będziemy, zgodnie z przyjętym zwyczajem, pisać

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,$$

jeśli F jest jakąś funkcją pierwotną funkcji f, przy czym C oznaczać tu będzie zawsze funkcję lokalnie stałą, czyli funkcję, która *jest stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji* f.

Przykłady

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int e^x\,dx = e^x + C$.
3. $\int \cos x\,dx = -\sin x + C$.
4. $\int \sin x\,dx = \cos x + C$.
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.
6. $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ dla $a \neq -1$ i każdego x, dla którego funkcja x^a jest określona (jeśli $a > 0$ jest liczbą wymierną postaci $\dfrac{k}{2m+1}$, k, m –całkowite, to dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{R}$, jeśli $a < 0$ jest liczbą wymierną postaci $\dfrac{k}{2m+1}$, k, m –całkowite, to dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem 0, jeśli $a > 0$ jest liczbą rzeczywistą innej postaci to dziedziną jest $[0,\infty)$, w przypadku $a < 0$, które nie jest postaci $\dfrac{k}{2m+1}$, k, m –całkowite, dziedziną jest $(0,\infty)$).
7. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$.

Te wzory należy zapamiętać. Jasne jest, że nie każda funkcja ma funkcję pierwotną. Niech $f(x) = 0$ dla $x \leq 0$ i niech $f(x) = 1$ dla $x > 0$. Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to dla $x \leq 0$ mamy $F'(x) = 0$, więc funkcja F jest stała na półprostej $(-\infty, 0]$. Dla $x > 0$ mamy $F'(x) = 1$, więc musi istnieć stała liczba c, taka że $F(x) = x + c$ dla każdego $x > 0$. Ponieważ F ma być funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, w szczególności w punkcie 0, więc musi być $F(x)=c$ dla $x\leq 0$ oraz $F(x)=x+c$ dla $x>0$. Niestety tak zdefiniowana funkcja nie ma pochodnej w punkcie 0: lewostronna pochodna to 0, a prawostronna to 1. Jest to ilustracja ogólnego zjawiska. Udowodniliśmy przecież, że jeśli funkcja ma funkcję pierwotną, czyli jest pochodną pewnej funkcji, to na każdym przedziale przysługuje jej własność przyjmowania wartości pośrednich, czyli własność Darboux. Warunek ten jest konieczny, ale niestety niedostateczny. Można natomiast udowodnić

Twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji ciągłej

Jeśli $f\colon P\longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą na przedziale P, to f ma na nim funkcję pierwotną.

Dowód. (szkic: nie zdefiniowaliśmy nawet pola, tym bardziej nie wykazaliśmy żadnych jego własności!)

Załóżmy najpierw, że funkcja f jest dodatnia. Niech $x_0\in P$ i niech $x\geq 0$. Niech $F(x)$ oznacza pole obszaru ograniczonego z dołu odcinkiem $[x_0,x]$, z góry wykresem funkcji f, z lewej strony prostą pionową przechodzącą przez punkt $\begin{pmatrix}x_0\\0\end{pmatrix}$, z prawej strony – prostą pionową przechodzącą przez punkt $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$. W przypadku $x<x_0$ zamiast pola analogicznego obszaru rozważamy liczbę ujemną, której wartością bezwzględną jest odpowiednie pole. Wykażemy, że $F'(x)=f(x)$ w przypadku $x>x_0$ pozostawiając rozważenie drugiego przypadku, całkowicie analogicznego, czytelnikom. Załóżmy, że $h>0$ jest tak małą liczbą dodatnią, że $x+h\in P$. W tej sytuacji $F(x+h)-F(x)$ jest polem obszaru ograniczonego z dołu odcinkiem $[x,x+h]$, z góry – wykresem funkcji f, z lewej strony – prostą pionową przechodzącą przez $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$, z prawej strony – prostą pionową przechodzącą przez $\begin{pmatrix}x+h\\0\end{pmatrix}$. Z rysunku i ze znanego wzoru na pole prostokąta widać, że

$$\inf\{f(t)\colon\quad x\leq t\leq x+h\}\leq\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leq\sup\{f(t)\colon\quad x\leq t\leq x+h\}$$

– obszar opisany przed chwilą zawiera prostokąt o wysokości $\inf\{f(t)\colon\quad x\leq t\leq x+h\}$ i podstawie h i jest zawarty w prostokącie o wysokości $\sup\{f(t)\colon\quad x\leq t\leq x+h\}$ i podstawie h. Z ciągłości funkcji f wynika, że $\lim\limits_{h\to 0^+}\inf\{f(t)\colon\quad x\leq t\leq x+h\}=f(x)=\lim\limits_{h\to 0^+}\sup\{f(t)\colon\quad x\leq t\leq x+h\}$. Stąd i z twierdzenia o trzech funkcjach wynika od razu, że $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$. Minimalna modyfikacja tego rozumowania pokazuje, że również $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$. Jeśli funkcja f przyjmuje również wartości ujemne, lub tylko ujemne, to można do niej dodać liczbę dodatnią tak dużą, by wartości nowej funkcji w punktach x_0, x i $x+h$ oraz wszystkich leżących między nimi były dodatnie. Można to zrobić, bo funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest ograniczona – rozpatrujemy być może tylko część dziedziny, ale tak wolno postępować, bo interesują nas jedynie wartości przyjmowane przez nią w okolicach x. Na tym zakończymy szkicowanie dowodu. ■

Dowód istnienia funkcji pierwotnej ma wyjaśnić związek całki z polem. w istocie rzeczy pierwsze wzory na pola figur bardziej skomplikowanych uzyskano już w starożytności (koło, parabola, powierzchnia kuli itd.). Istotny postęp uzyskany został dzięki Archimedesowi. Jednak jego pomysłowe rozumowania długo musiały czekać na kontynuatorów. W praktyce następne poważne osiagnięcia w tej dziedzinie uzyskano dopiero dzięki zauważeniu związku liczenia pól, objętości z różniczkowaniem. Rezultaty Archimedesa i jego współczesnych stały się teraz banalnymi zadaniami, z którymi radzi sobie wielu studentów, choć wielu z nich miałoby istotne trudności ze zrozumieniem tego, co pisał Archimedes (nawet po przetłumaczeniu na polski lub inny język dla nich zrozumiały).

Warto też wyraźnie stwierdzić, że choć wiemy, że funkcje ciągłe mają funkcje pierwotne, to jednak nie zawsze daje się je wyrazić za pomocą funkcji, którymi do tej pory operujemy, wiele z nich to tzw. funkcje nieelementarne. Ważny przykład to e^{-x^2}. Jej funkcji pierwotnej nie można wyrazić za pomocą wielomianów, sinusa, kosinusa, funkcji wykładniczej, funkcji odwrotnych do wymienionych, jeśli dopuścimy działania arytmetyczne i składanie funkcji. Tego typu twierdzenia udało się wykazać w drugiej połowie XIX wieku. Ich dowody, a nawet dokładniejsze omówienie, daleko wykraczają poza program nauczania matematyki w wyższych uczelniach, z wyjątkiem niektórych wydziałów matematyki. Wspominamy jednak o tych twierdzeniach, bo funkcja e^{-x^2} jest jedną z częściej używanych w statystyce. Z przyczyn podanych przed chwilą stworzono tablice jej całek, można wybierać funkcję pierwotną tak, by jej granicą przy $x \longrightarrow -\infty$ była liczba 0. Druga przyczyna to ostrzeżenie, że problemy wyglądające na elementarne czasem są nierozwiązywalne. Jest wiele innych funkcji tego typu, np. $\dfrac{\sin x}{x}$, $\sin x^2$, $\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}$ przy założeniu, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest wielomianem stopnia >2 i to nie szczególnie dobranym (x^4+2x^2+1 nie powoduje żadnych kłopotów, bo pierwiastek to tylko dekoracja!). Często też pozornie mała zmiana zmienia zasadniczo trudność problemu, który trzeba rozwiązać: całka z funkcji e^{-x^2} jest nieelementarna, natomiast $\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$!

Wniosek z dowodu twierdzenia o istnieniu pochodnej funkcji ciągłej

Jeśli funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale $[a,b]$, F jest funkcją pierwotną funkcji f, to pole obszaru $A=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\colon\quad a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\right\}$, tzw. „pole pod wykresem funkcji f", równe jest

$$F(b)-F(a).$$

Dowód. W dowodzie twierdzenia o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji wskazaliśmy funkcję pierwotną F funkcji f, dla której wzór wypisany we wniosku ma miejsce. Ze względu na twierdzenie o jednoznaczności funkcji pierwotnej różnica $F(b)-F(a)$ nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej (różne funkcje pierwotne na przedziale różnia się o stałą). ■

Definicja całki oznaczonej Newtona

Całką oznaczoną funkcji $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ nazywamy liczbę $f(b)-F(a)$, gdzie F oznacza funkcję pierwotną funkcji f. Stosujemy oznaczenie

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \quad \blacksquare$$

Stosujemy też inne oznaczenie: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, więc można pisać $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$.

Przykłady

8. $\int_a^b dx = b - a$, bo pole prostokąta o podstawie $b-a$ i wysokości 1 równe jest $b-a$. $\blacksquare$

9. $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$, bo $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$. To też żadna sensacja. Jeśli $0 \le a$, to $\int_a^b x\,dx$ to pole trapezu o podstawach a i b, którego wysokość równa jest $b-a$, czyli $\frac{1}{2}(b+a)(b-a)$. Jeśli $b \le 0$, to podstawy trapezu równe są $|a| = -a$ oraz $|b| = -b$, a wysokość równa jest $b-a$, zatem całka jest liczbą przeciwną do pola, więc równa jest $-\frac{1}{2}\big(-b+(-a)\big)(b-a) = \frac{b^2-a^2}{2}$. Pozostał jeszcze jeden przypadek: $a < 0 < b$. Mamy oczywiście $\int_a^b x\,dx = \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx$. Wobec tego tym razem całka równa jest różnicy pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych o ramionach $|a|$ i b. Te pola to oczywiście $\frac{1}{2}b^2$ i $\frac{1}{2}a^2$, całka równa jest $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. $\blacksquare$

10. $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$, bo $x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$. Wobec tego „pole pod parabolą" równe jest $\frac{1}{3}$ pola prostokąta o wierzchołkach $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\a^2\end{pmatrix}$. Wzór ten znany był już Archimedesowi, ale jego wyprowadzenie – nie znano jeszcze wtedy całek – było bardzo trudne. $\blacksquare$

Obliczanie całek jest na ogół dosyć trudne, wymaga pomysłowości. My podamy kilka prostych wzorów i pokażemy jak można je stosować w prostych sytuacjach. Obecnie istnieją liczne programy komputerowe, np. Mathematica, Maple, Derive, za pomocą których można obliczyć wiele całek. Tym nie mniej warto znać podstawowe wzory i umieć stosować w prostych sytuacjach.

Twierdzenie o całce sumy dwu funkcji.

Załóżmy, że funkcje f i g mają funkcje pierwotne. Wtedy funkcje $f \pm g$ też mają funkcje pierwotne i zachodzą wzory

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \qquad \text{oraz}$$

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Pierwszy z tych wzorów wynika od razu z tego, że pochodna sumy jest sumą pochodnych, różnicy – różnicą pochodnych. Wzór drugi wynika z pierwszego. $\blacksquare$

Twierdzenie o całce iloczynu funkcji przez liczbę

Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną, to dla każdej liczby rzeczywistej c funkcja cf ma funkcję pierwotną i zachodzi równość

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx\,.$$

Dla całki oznaczonej

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wzory wynikają od razu z odpowiednich własności pochodnej. ■

Z obliczaniem całki iloczynu jest o wiele gorzej, bo wzór na pochodną iloczynu jest bardziej skomplikowany, zresztą istnieją funkcje (nieciągłe), które maja funkcje pierwotne a ich iloczyn – nie. Podamy teraz dwa twierdzenia, które w niektórych sytuacjach pozwalają uprościć obliczanie całki z iloczynów bardzo szczególnej postaci.

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Załóżmy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne. Wtedy zachodzi wzór:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Dla całki oznaczonej

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Wzór ten jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o pochodnej iloczynu. ■

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Załóżmy, że funkcje f i g' są ciągłe oraz że F jest funkcją pierwotna funkcji f. Wtedy

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Dla całki oznaczonej

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} F(y)\,dy = F(g(b)) - f(g(a))\,.$$

Ten wzór wynika natychmiast z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji. ■

Ostatnie dwa twierdzenia w połączeniu z poprzednimi stanowią dobrą podstawę do znajdowania całek z licznych funkcji zdefiniowanych elementarnie. Zanim pokażemy, jak można to robić powiemy jakie oznaczenia są często stosowane.

Umowa w kwestii oznaczeń

Zamiast pisać $g'(x)\,dx$ będziemy pisać $dg(x)$; jeśli $y = g(x)$, to piszemy $dy = g'(x)\,dx = dg(x)$. ■

Zauważmy, że jeśli funkcja g jest różnowartościowa, czyli ma funkcję odwrotną g^{-1}, to równość $y = g(x)$ równoważna jest równości $x = g^{-1}(y)$. Wtedy, zgodnie z przyjętą umową, możemy napisać $dx = d(g^{-1})(y) = (g^{-1})'(y)\,dy$. Na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej mamy $\big(g^{-1}\big)'(y) = \big(g^{-1}\big)'\big(g(x)\big) = \dfrac{1}{g'(x)}$. Wobec tego $dx = d\big(g^{-1}\big)(y) = \dfrac{1}{g'(x)}\,dy$, co w świetle wzoru $dy = dg(x) = g'(x)\,dx$, wygląda na zupełnie oczywiste stwierdzenie. Jednak należy pamiętać o tym, że symbole dx, dy nie oznaczają liczb, w ogóle nie były przez nas zdefiniowane. Występują jedynie w połączeniu z innymi. Wobec tego nie jest całkiem jasne, czy reguły działań na liczbach maja zastosowanie również w tym przypadku, a dokładniej: które reguły pozostają w mocy. Okazało się, że wnioskowanie, jeśli $dy = g'(x)\,dx$, to $dx = \dfrac{1}{g'(x)}\,dy$ ma sens dzięki twierdzeniu o pochodnej funkcji odwrotnej! Przypomnieć wypada, że oprócz stosowanego przez nas oznaczenia pochodnej $y' = g'(x)$ stosowane jest oznaczenie $\dfrac{dy}{dx} = g'(x)$. Symbol $\dfrac{dy}{dx}$ jest oznaczeniem pochodnej, nie jest ułamkiem. Można go jednak traktować jak iloraz. Czytelnicy przekonają się jeszcze wiele razy, że upraszcza to manipulowanie wzorami. Zauważmy jeszcze, że jeśli $x = h(t)$, to oprócz równości $dy = g'(x)\,dx$ mamy też $dx = h'(t)\,dt$. Chciałoby się wywnioskować z tych wzorów, że $dy = g'(x)h'(t)\,dt$. Można to zrobić, bo $y = g\big(h(t)\big)$, więc $dy = (g\circ h)'(t)\,dt$, ale na mocy twierdzenia o pochodnej złożenia $\big(g\circ h\big)'(t) = g'\big(h(t)\big)h'(t)$, zatem również $dy = g'\big(h(t)\big)h'(t)\,dt$. Widać więc znów analogię z ułamkami: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$, czyli $dy = (g\circ h)'(t)\,dt = g'(h(t))h'(t)\,dt = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}\cdot dt$. Zakończymy te przydługie rozważania na temat oznaczeń stwierdzeniem, że wzór na całkowanie przez części zwykle zapisywany jest w postaci:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int f\,dg = fg - \int g\,df = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

a wzór na całkowanie przez podstawienie – w postaci:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\,.$$

Przykłady

11. $\displaystyle\int e^{2x}\,dx \;\underset{dy=2\,dx}{\overset{y=2x}{=\!=\!=}}\; \int e^y\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C\,.$ ■

12. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx \;\underset{dy=2xdx}{\overset{y=x^2}{=\!=\!=}}\; \int e^y\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\,.$ ■

13. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \;\underset{dy=-\sin x\,dx}{\overset{y=\cos x}{=\!=\!=}}\; -\int \frac{1}{y}\,dy = -\ln|y| + C = -\ln|\operatorname{tg} x| + C\,.$ ■

14. $\displaystyle\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \;\underset{dx=r\cos t\,dt}{\overset{x=r\sin t}{=\!=\!=}}\; \int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\;r\cos t\,dt = \int \sqrt{r^2\cos^2 t}\;\;r\cos t\,dt =$

$\displaystyle= \int r^2\cos^2 t\,dt = r^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \;\underset{du=2dt}{\overset{u=2t}{=\!=\!=}}\; r^2\int \frac{1+\cos u}{2}\cdot\frac{du}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{u}{2} + \frac{\sin u}{2}\right) + C =$

$\displaystyle= \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{r^2}{2}\,(t + \sin t\cos t) + C = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + C$ – w tym przypadku przyjęliśmy $x = r\sin t$, możemy przyjąć, że $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, bo wtedy x będzie przyjmować wszystkie wartości z przedziału $[-r, r]$, w tej sytuacji $\cos t \ge 0$ i wobec tego zachodzi równość $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. ■

15. $\displaystyle\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[r^2\arcsin\frac{r}{r}+r\sqrt{r^2-r^2}-r^2\arcsin\frac{-r}{r}-(-r)\sqrt{r^2-(-r)^2}\right]=$

$=\dfrac{1}{2}\left[2r^2\arcsin 1\right]=r^2\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi r^2}{2}$. Skorzystaliśmy tu oczywiście z wyniku otrzymanego w przykładzie poprzednim. Obliczana całka okazała się połową koła o promieniu r, co nie jest specjalnie dziwne, bo wykresem funkcji $\sqrt{r^2-x^2}$ jest górna połowa okręgu o środku $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ i promieniu r, więc „pole pod wykresem” to połowa pola koła o promieniu r. ■

16. $\int xe^x\,dx=\int x\,(e^x)'\,dx\ \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}}\ xe^x-\int(x)'e^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C$. ■

17. $\int x^2e^x\,dx=\int x^2\,(e^x)'\,dx\ \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}}\ x^2e^x-\int\left(x^2\right)'e^x\,dx=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx=$

$=x^2e^x-2\int xe^x\,dx\ \overset{\text{poprzedni}}{\underset{\text{przykład}}{=\!=\!=}}\ x^2e^x-2\,(xe^x-e^x)+C=e^x(x^2-2x+2)+C$. W tym przykładzie skorzystaliśmy z wyniku uzyskanego w poprzednim. Widać, że postępując analogicznie można obliczać całki z funkcji x^3e^x, x^4e^x itd. – jednokrotne całkowanie przez części obniża stopień wielomianu, przez który mnożymy funkcję wykładniczą o 1, więc wielokrotne pozwala na pozbycie się go, czyli sprowadzenie problemu do obliczenia całki $\int e^x\,dx$, a z tym już umiemy sobie poradzić. ■

18. $\int xe^{3x}\,dx=\int x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'\,dx\ \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}}\ \frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int(x)'e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx=$

$=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C$ – ostatnie całkowanie przez podstawienie ($y=3x$) potraktowaliśmy już jako na tyle oczywiste, że nawet tego specjalnie nie zaznaczyliśmy. ■

19. $\int x\cos(5x)\,dx=\int x\left(\frac{1}{5}\sin(5x)\right)'\,dx\ \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}}\ \frac{1}{5}x\sin(5x)-\frac{1}{5}\int(x)'\sin(5x)\,dx=$

$$=\tfrac{1}{5}x\sin(5x)-\tfrac{1}{5}\int\sin(5x)\,dx=\tfrac{1}{5}x\sin(5x)-\tfrac{1}{5}\left(-\tfrac{1}{5}\cos(5x)\right)+C=$$

$$=\tfrac{1}{5}x\sin(5x)+\tfrac{1}{25}\cos(5x)+C\,.\ ■$$

20. $\int\ln x\,dx\ \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}}\ x\ln x-\int x\,d(\ln x)=x\ln x-\int x\dfrac{1}{x}\,dx=x\ln x-\displaystyle\int dx=$

$$=x\ln x-x+C\,.\ ■$$

21. $\displaystyle\int\arcsin x\,dx\ \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}}\ x\arcsin x-\int x\,d(\arcsin x)=x\arcsin x-\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$

$$\overset{y=1-x^2}{\underset{dy=-2x\,dx}{=\!=\!=}}\ x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int y^{-1/2}\,dy=$$

$$=x\arcsin x+\frac{1}{2\,(1+(-1/2))}y^{1+-(1/2)}+C=x\arcsin x+\frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^{1/2}+C=$$

$$=x\arcsin x+\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}+C\,.\ ■$$

22. $\displaystyle\int\frac{dx}{2x-3}\ \overset{y=2x-3}{\underset{dy=2x\,dx}{=\!=\!=}}\ \int\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2}\ln|y|+C=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+C\,.$ ■

23. $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+3x+2}\,dx=\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx\,.$

Można spodziewać się, że wyrażenie $\dfrac{x}{x^2+3x+2}$ jest sumą ułamków postaci $\dfrac{A}{x+1}$ oraz $\dfrac{B}{x+2}$.

Aby równość $\dfrac{x}{x^2+3x+2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}$ miała miejsce musi być $x=A(x+2)+B(x+1)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x\neq -1,\ -2$.[1] Wobec tego musi być $A+B=1$ i $2A+B=0$, więc $A=-1$ i $B=2$. Mamy więc $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+3x+2}\,dx=\int\frac{-1}{x+1}\,dx+\int\frac{2}{x+2}\,dx=$

$$=-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C=\ln\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C\,.\ \blacksquare$$

Metoda zasygnalizowana w przykładzie 23 to tzw. rozkład na ułamki proste. Polega ona na tym, że funkcję wymierną, czyli iloraz dwóch wielomianów przedstawiamy w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych, tj. ułamków postaci $\dfrac{A}{(x+c)^n}$, gdzie $a,c\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$ lub postaci $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, gdzie $A,B,p,q\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ oraz $p^2-4q<0$. Wykazaliśmy wcześniej, że taki rozkład funkcji wymiernej zawsze istnieje. Dowód można znaleźć też w książkach.[2] Pokażemy na kilku przykładach jak ta metoda działa. Autor nie sądzi, by wszyscy studenci musieli ją opanować ze wszystkimi szczegółami, powinni jednak zapoznać się z kilkoma przykładami, by nie wpadać w zdumienie, gdy ktoś będzie rozkładać funkcje wymierne na ułamki proste przy okazji ich całkowania, rozwijania w szereg potęgowy lub w innych przypadkach i mieć wyobrażenie jak można rozkład na ułamki proste znaleźć.

24. $$\int\frac{x^3}{x^2+2x+2}\,dx=\int\frac{(x^2+2x+2)(x-2)+2x+4}{x^2+2x+2}\,dx=\int\left(x-2+\frac{2(x+2)}{x^2+2x+2}\right)dx=$$
$$=\frac12x^2-2x+\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int\frac{2}{x^2+2x+2}\,dx=\frac12x^2-2x+\int\frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\,dx+$$
$$+\int\frac{2}{(x+1)^2+1}\,d(x+1)\ \underset{\text{przez podstawienia}}{\overset{\text{całkujemy}}{=\!=\!=\!=}}\ \frac12x^2-2x+\ln(x^2+2x+2)+2\operatorname{arctg}(x+1)+C\,.$$

To wygląda trochę na stosowanie jakichś sztuczek. Tak jednak nie jest. Można było przewidzieć jak będą wyglądać ułamki proste, których sumą będzie dana funkcja wymierna. Stopień licznika jest o jeden większy niż stopień mianownika, więc powinien wystąpić wielomian stopnia pierwszego oraz ułamek, którego licznik jest wielomianem stopnia nie większego niż 1, a mianownik równy jest x^2+2x+2. Można więc było spróbować napisać $\dfrac{x^3}{x^2+2x+2}=ax+b+\dfrac{px+q}{x^2+2x+2}$. Po pomnożeniu przez mianownik otrzymujemy równość $x^3=(ax+b)(x^2+2x+2)+px+q=$ $=ax^3+(2a+b)x^2+(2a+2b+p)x+(2b+q)$. Z równości wielomianów wynika równość ich współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x. Muszą więc być spełnione równości $1=a$, $0=2a+b$, $0=2a+2b+p$ oraz $0=2b+q$. Otrzymaliśmy układ czterech równań z czterema niewiadomymi. Teraz trzeba go rozwiązać, co w tym przypadku nie stanowi żadnego problemu: $a+1\ \ b=-2a=-2$, $p=-2a-2b=2$ i wreszcie $q=-2b=4$. Później po prostu obliczyliśmy pochodną mianownika i zapisaliśmy licznik w postaci *stała·pochodna*

[1] W rzeczywistości ponieważ funkcje x oraz $A(x+2)+B(x+1)$ są ciągłe we wszystkich punktach, w tym w punkcie $x=-1$ i w punkcie $x=-2$, równość musi mieć miejsce również dla $x=-1,-2$.

[2] zob. G.M.Fichtenholz t. II.

mianownika+ inna stała, co ułatwiło ostateczne obliczenie całki. ■

25. Obliczymy $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$. Zaczniemy od rozkładu na ułamki proste. W tym celu przedstawimy mianownik w postaci iloczynu wielomianów stopnia nie większego niż 2. Mamy $x^4+1=\left(x^2+1\right)^2-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2=\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)$. Teraz znajdziemy liczby rzeczywiste a, b, c i d, takie że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $\displaystyle\frac{1}{1+x^4}=\frac{ax+b}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. Mnożąc tę równość przez $1+x^4$, skracając co się tylko da i porządkując otrzymujemy: $1=(ax+b)(x^2+x\sqrt{2}+1)+(cx+d)(x^2-x\sqrt{2}+1)=$ $=(b+d)+x(a+b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2})+x^2\left(b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2}\right)+x^3(a+c)$. Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x otrzymujemy

$$b+d=1\,,\quad a+c+(b-d)\sqrt{2}=0\,,\quad b+d+(a-c)\sqrt{2}=0\,,\quad a+c=0\,.$$

Jest więc to układ czterech równań z czterema niewiadomymi. Ponieważ $a+c=0$ (równanie czwarte), więc z drugiego równania możemy wywnioskować równość $b=d$, a z niej i z równania pierwszego wynika, że $b=d=\frac{1}{2}$. Z równania trzeciego i już uzyskanych wyników wynika, że $a=-c=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$. Wobec tego mamy równość $\displaystyle\frac{1}{1+x^4}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. Teraz wystarczy scałkować oba składniki. Scałkujemy drugi, bo ma lepszy wygląd zewnętrzny (mniej minusów). Mamy $\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)'+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)'}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{2}{\left(x\sqrt{2}+1\right)^2+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\left(x\sqrt{2}+1\right)^2+1}\,d(x\sqrt{2}+1)=$$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+C$. Teraz można obliczyć drugą całkę w taki sam sposób, ale nie ma takiej potrzeby. Wystarczy zauważyć, że $\displaystyle\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx \overset{u=-x}{\underset{du=-dx}{=\!=\!=}}$

$$=\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}u+\frac{1}{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}\,(-du)=-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(u^2+u\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(u\sqrt{2}+1\right)+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(-x\sqrt{2}+1\right)+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)+C\,.$$

Dodając obliczone całki otrzymujemy

$$\int\frac{1}{1+x^4}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)\Big)+C\,.$$

W ten sposób obliczyliśmy tę całkę. Pokażemy jak można to zrobić nieco inaczej. Zauważmy, że $\dfrac{1}{1+x^4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^4}+\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\right)$. Wobec tego można obliczyć dwie całki: $\displaystyle\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx$ oraz $\displaystyle\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$. Można je oczywiście obliczyć rozkładając funkcje podcałkowe na ułamki proste, ale nie jest to konieczne. Zachodzą równości

$$\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx=-\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\ \overset{y=x+1/x}{\underset{dy=1-1/x^2}{=\!=\!=\!=}}\ -\int\frac{dy}{y^2-2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{y+\sqrt{2}}-\frac{1}{y-\sqrt{2}}\right)dy=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|y+\sqrt{2}|-\ln|y-\sqrt{2}|+C\Big)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y+\sqrt{2}}{y-\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+C\,.$$

Pierwsza całka została znaleziona. Teraz zajmiemy się drugą.

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx=-\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}\ \overset{y=x-1/x}{\underset{dy=1+1/x^2}{=\!=\!=\!=}}\ \int\frac{dy}{y^2+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}\ \overset{z=y/(\sqrt{2})}{\underset{dz=dy/(\sqrt{2})}{=\!=\!=\!=}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg}z+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}z=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)+C\,.$$

Wobec tego otrzymujemy $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)+C\,.$*
Widzimy więc, że otrzymaliśmy wynik nieco inny niż poprzednio! Można jednak się przekonać, że jest to ten sam wynik. Wystarczy skorzystać z wzoru $\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$ – by przekonać się o jego prawdziwości wystarczy obliczyć wartość tangensa obu stron tej podejrzanej równości korzystając z wzoru na tangens sumy dwóch kątów a potem jeszcze trochę pomęczyć się z jej interpretacją np. dla $x=0$; wg drugiej wersji wzoru funkcja pierwotna w punkcie 0 określona nie jest, wg. pierwszej jest, z cytowanych twierdzeń ogólnych wynika, że powinna być określona na całej prostej. Pokazaliśmy więc dwie metody, otrzymaliśmy na tyle różnie wyglądające wyniki, że niewielu studentów pierwszego roku stwierdziłoby, że to w istocie rzeczy ten sam wynik różniący się jedynie zapisem. To dosyć częste zjawisko przy całkowaniu, ale nie będziemy tych problemów omawiać, zasygnalizowaliśmy jedynie zjawisko. ■

26. Obliczymy całkę $\displaystyle\int\frac{x^5}{1+x^4}dx$. Można jak w przykładach poprzednich przedstawić funkcję podcałkową w postaci ułamków prostych, ale w tym konkretnym przypadku widać od razu prostszą metodę. Mamy bowiem $\displaystyle\int\frac{x^5}{1+x^4}dx\ \overset{y=x^2}{\underset{dy=2x\,dx}{=\!=\!=\!=}}\ \frac{1}{2}\int\frac{y^2}{1+y^2}dy=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)dy=$

$$=\frac{1}{2}\left(y-\operatorname{arctg}y\right)+C=\frac{1}{2}\left(x^2-\operatorname{arctg}x^2\right)+C\,.\ ■$$

* Powinna wystąpić suma dwu stałych, ale to i tak jest dowolna stała, a raczej funkcja stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie, więc nie ma potrzeby zmieniać oznaczeń.

27. Obliczymy całkę $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$. Będziemy całkować przez części dwukrotnie. $\int e^{2x}\sin 3x\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \left(e^{2x}\right)'\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\left(\sin 3x\right)'\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}\int \left(e^{2x}\right)'\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\int e^{2x}\left(\cos 3x\right)'\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Udało nam się więc w wyniku kilku przekształceń sprowadzić obliczanie całki $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ do obliczania tej samej całki! To nie jest bez sensu wbrew pozorom: *uzyskaliśmy równanie, w którym niewiadomą jest poszukiwana całka.* Starczy je teraz rozwiązać. Otrzymujemy równość

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + C$$

Stałej C w równaniu nie było, ale teraz musi się pojawić. Równość całek nieoznaczonych oznacza jedynie, że różnica między tymi funkcjami pierwotnymi jest funkcją lokalnie stałą, więc gdy wszystkie całki znajdują się po jednej stronie równości trzeba dopisać C po drugiej stronie tej równości. ■

28. $$\int \sqrt{4+x^2}\,dx \;\overset{x=2\mathrm{tg}\,t}{\underset{dx=2(1+\mathrm{tg}^2 t)\,dt}{=\!=\!=}}\; 2\int \sqrt{4+4\mathrm{tg}^2 t}(1+\mathrm{tg}^2 t)\,dt = 4\int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)dt =$$

$$= 4\int \frac{1}{\cos^3 t}\,dt = 4\int \frac{\cos t}{\cos^4 t}\,dt = 4\int \frac{\cos t}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}\,dt \;\overset{y=\sin t}{\underset{dy=\cos t\,dt}{=\!=\!=}}\; 4\int \frac{dy}{\left(1-y^2\right)^2} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)^2 dy = \int \left(\frac{1}{(1-y)^2} + 2\frac{1}{1-y}\frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2}\right)dy =$$

$$= \int \left(\frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2}\right) =$$

$$= \int \left((1-y)^{-2} + (1-y)^{-1} + (1+y)^{-1} + (1+y)^{-2}\right)dy =$$

$$= (1-y)^{-1} - \ln|1-y| + \ln|1+y| - (1+y)^{-1} + C =$$

$$= \frac{2y}{1-y^2} + \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C.$$

Wypada powrócić do zmiennej x. Podstawialiśmy $x = 2\mathrm{tg}\,t$. Możemy oczywiście zakładać,że $|t| < \frac{\pi}{2}$, bowiem każda liczbę x można przedstawić w postaci $2\mathrm{tg}\,t$ wybierając liczbę t z przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ten wybór liczby t gwarantuje, że $\cos t > 0$, z czego zresztą już raz skorzystaliśmy. Mamy więc $\frac{1}{\cos t} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t} = \sqrt{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}$. Stąd wnioskujemy, że zachodzą równości $\frac{2y}{1-y^2} = \frac{2\sin t}{\cos^2 t} = 2\mathrm{tg}\,t\frac{1}{\cos t} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4+x^2}$. Mamy też $\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| =$

$$= \ln\frac{1+y}{1-y} = \ln\frac{(1+y)^2}{1-y^2} = \ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t} = 2\ln\frac{1+\sin t}{\cos t} = 2\ln\left(\frac{1}{\cos t} + \mathrm{tg}\,t\right) =$$

$= 2\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right)$. Ostatecznie $\int \sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4+x^2} + 2\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right) + C$.

Tę równość można uzyskać nieco szybciej stosując inne podstawienia (tzw. podstawienia Eulera), ale nie będziemy już tego robić. Ogólnie rzecz biorąc wyrażenia zawierające jeden pierwiastek kwadratowy z wielomianu pierwszego lub drugiego stopnia można scałkować stosując jakieś podstawienie trygonometryczne, jak w tym przykładzie, lub podstawienia Eulera, o których mówić tu nie będziemy lub też podstawienia hiperboliczne, którymi również nie będziemy się zajmować. To są zamienne metody. W niektórych sytuacjach jedne dają wynik szybciej niż inne, ale które to zależy od całkowanej funkcji. ■

Na tym przykładzie kończymy demonstracje metod całkowania. Podkreślić należy, że dalecy jesteśmy od wyczerpania tematu, ale ekonomista powinien raczej wiedzieć, że są całki, których obliczenie może zlecić komputerowi, może też posłużyć się tablicami, jeśli nie lubi komputerów lub nie ma programu, który umie liczyć całki i wreszcie może skontaktować się z jakimś matematykiem. Teraz pokażemy kilka twierdzeń i nieco zastosowań całek.

Twierdzenie o porównywaniu całek

Jeśli funkcje f i g mają funkcje pierwotne na przedziale $[a,b]$ i dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi nierówność $f(x) \le g(x)$, to również $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Dowód. Niech F i G oznaczają funkcje pierwotne funkcji f i g. Mamy $G'(x) - F'(x) = g(x) - f(x) \ge 0$, zatem funkcja $G - F$ jest niemalejąca. Wobec tego $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) - \big(F(b) - F(a)\big) = \big(G(b) - F(b)\big) - \big(G(a) - F(a)\big) \ge 0$. ■

Twierdzenie o wartości średniej

Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje liczba $c \in [a,b]$, taka że zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\,.$$

Dowód. Wynika natychmiast z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji pierwotnej funkcji f. ■

Wartość średnia funkcji.

Liczbę $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \ \Big(= f(c)\Big)$ nazywamy wartością średnią funkcji f. Można myśleć, że jeśli funkcja f przyjmuje jedynie wartości dodatnie, to liczba $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ jest wysokością prostokąta o podstawie $b-a$, którego pole równe jest „polu pod wykresem" funkcji f. Jeśli $f(x)$ oznacza prędkość w chwili x, to wtedy $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ oznacza iloraz przebytej drogi $\int_a^b f(x)\,dx$* przez czas $b-a$ zużyty na jej przebycie, czyli średnią prędkość w tym ruchu. Następne przykłady, które motywują tę definicję pojawią się niebawem i czytelnik z pewnością je dostrzeże.

---

* Przypomnijmy, że jeśli $F(x)$ oznacza położenie poruszającego się punktu w momencie x, to $f(x)=F'(x)$ oznacza prędkość w tym momencie, mówiliśmy o tym przy okazji definicji pochodnej funkcji jednej zmiennej.

Twierdzenie o addytywności całki względem przedziału

Jeśli $a < c < b$ i funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale $[a,b]$, to zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Dowód. Niech F oznacza funkcję pierwotną funkcji f. Wtedy $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, $\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)$ i $\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c)$. Z tych równości teza wynika natychmiast. ■

Punktem wyjścia do wielu zastosowań całki jest

Twierdzenie o sumach Riemanna

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeżeli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ oraz $t_i - t_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to zachodzi nierówność

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \Big(f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) \Big) \right| < \varepsilon\,.$$

Dowód. Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, więc na każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ przyjmuje kresy. Niech m_i oznacza kres dolny, a M_i –górny. Wobec tego dla każdego $x \in [x_{i-1}, x_i]$ zachodzi nierówność $m_{i-1} \le f(x) \le M_i$. Wobec tego, na mocy twierdzenia o porównywaniu całek zachodzą nierówności: $m_i(x_i - x_{i-1}) \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \le M_i(x_i - x_{i-1})$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Dodając te nierówności stronami i korzystając z twierdzenia o addytywności funkcji względem przedziału otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})\,.$$

Ponieważ f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$, więc jest jednostajnie ciągła, czyli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeśli $|t - s| < \delta$, to $|f(t) - f(s)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Wobec tego jeśli $x_i - x_{i-1} < \delta$, to $M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ dla wszystkich i. Stąd od razu wynika, że zachodzi: $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$. Stąd teza wynika natychmiast: obydwie liczby $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ oraz $\int_a^b f(x)\,dx$ leżą między sumami $\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ i $\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$, których różnica jest mniejsza od ε. Dowód został zakończony. ■

Sumy $\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ i $\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ nazywane są dolną i górną sumą Darboux, suma $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ – sumą Riemanna. Istnieją funkcje nieciągłe, które mają funkcje pierwotne, czyli są całkowalne w sensie Newtona, dla których teza twierdzenia o sumach Riemanna nie zachodzi. Przykładów podawać nie będziemy, zainteresowany czytelnik może je znaleźć w pozycjach obszerniejszych, np. we wspominanym już drugim tomie książki G.M.Fichtenholza, "Rachunek różniczkowy i całkowy". Podamy jednak definicję całkowalności w sensie Riemanna.

Definicja funkcji całkowalnej w sensie Riemanna

Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista I, taka że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeżeli $a = x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ oraz $t_i - t_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to zachodzi nierówność

$$\left| I - \Big(f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) \Big) \right| < \varepsilon\,.$$

Liczba I nazywana jest wtedy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$ i oznaczana symbolem $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. ■

Z twierdzenia o sumach Riemanna wynika, że funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna i że ich całki Riemanna oraz Newtona to te same liczby. Stosowanie tego samego symbolu jest więc w pełni uzasadnione tym bardziej, że można udowodnić, że jeśli funkcja (nieciągła) jest całkowalna zarówno w sensie Riemanna jak i w sensie Newtona, to obie całki się pokrywają.

Prosty dowód niewymierności liczby π

Michał Krych, artykulik z „Delty"

W 1761 roku niemieckiemu matematykowi, J.H.Lambertowi udało się udowodnić, że liczba π jest niewymierna. Jego dowód wykorzystywał tzw. ułamki łańcuchowe. Podobny dowód znalazł nieco później Francuz A.Legendre. Około stu lat później Liouville sformułował i udowodnił twierdzenie, które pozwoliło wskazać konkretne liczby przestępne, tj. takie, które nie są pierwiastkami żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Po upływie niewielu lat Hermite udowodnił, że jedna z najważniejszych liczb w matematyce, liczba e jest przestępna, a wkrótce Lindemann wykazał, że znana od starożytności liczba π również jest przestępna.Tym samym, okazało się, że kwadratura koła nie jest wykonalna. O ile mi wiadomo, około 1956 roku I.Niven wzorując się na wspomnianym wyżej dowodzie Hermite'a, podał dowód niewymierności π wykorzystujący jedynie najprostsze własności całek, znane obecnie uczniom szkół średnich. Jego rozumowanie przytoczymy poniżej.

Załóżmy, że $\pi = \dfrac{p}{q}$, gdzie p oraz q oznaczają liczby naturalne. Zdefiniujmy ciąg (c_n) wzorem $c_n = \dfrac{q^n}{n!} \displaystyle\int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x\,dx$. Wykażemy,że,

1° $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0\,;$

2° $c_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej n;

3° c_n jest liczbą całkowitą dla każdej liczby naturalnej n.

Oznaczać to będzie, że przyjęte założenie, że $\pi = \frac{p}{q}$ prowadzi do sprzeczności, bo ciąg dodatnich liczb całkowitych nie może być zbieżny do liczby 0.

Udowodnimy własności 1°, 2° i 3° ciągu (c_n).

Jeśli $0 \le x \le \pi$, to $x(\pi - x) \le \frac{\pi^2}{4}$ i $\sin x \ge 0$, zatem zachodzi nierówność: $\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \ge \int_0^\pi [x(\pi-x)]^n \sin x dx \ge 0$. Stąd mamy $0 \le c_n \le \frac{\pi}{n!}\left(\frac{q\pi^2}{4}\right)^n$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej a, np. dla $a = \frac{q\pi^2}{n!}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, co kończy dowód własności 1°.

Całkowana funkcja jest dodatnia wewnątrz przedziału $[0, \pi]$, więc całka z niej na tym przedziale jest dodatnia, zatem $c_n > 0$, co dowodzi, że własność 2° również ma miejsce.

Wykażemy, że własność 3° również przysługuje ciągowi (c_n). Ten fragment rozumowania jest najdłuższy. Niech w oznacza wielomian stopnia k. Pochodne funkcji w są więc równe 0 począwszy od $k+1$–ej, czyli $w^{(j)}(x) = 0$ dla $j \ge k+1$ i dowolnej liczby x. Zaczniemy od obliczenia całki nieoznaczonej $\int w(x)\sin x dx$. Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy: $\int w(x)\sin x dx = -w(x)\cos x + \int w'(x)\cos x dx = -w(x)\cos x + w'(x)\sin x - \int w''(x)\sin x dx$. Sprowadziliśmy zatem problem do obliczenia całki $\int w''(x)\sin x dx$, a więc do tego samego zadania z tym jednak, że udało się nam zmniejszyć o 2 stopień wielomianu, przez który wymnażamy sinus. Powtarzając to rozumowanie wielokrotnie i biorąc pod uwagę to, że pochodne wielomianu w począwszy od pochodnej $k+1$-ego rzędu zerują się otrzymujemy wzór:

$$\int w(x)\sin x dx = \cos x[-w(x) + w''(x) - w^{(4)}(x) + \ldots] + \sin x[w'(x) - w^{(3)}(x) + \ldots],$$

przy czym sumy w nawiasach kwadratowych są skończone, bo od pewnego momentu ich wszystkie składniki są zerami. Niech $w(x) = [x(\pi - x)]^n$. Oczywiście $w(x) = w(\pi - x)$. Wobec tego $w^{(j)}(x) = (-1)^j w^{(j)}(\pi - x)$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots$. Jest również $\sin 0 = \sin\pi = 0$ oraz $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$. Do stwierdzenia całkowitości liczb c_n wystarczy więc, by liczby $\frac{q^n}{n!}w(0)$, $\frac{q^n}{n!}w''(0)$, $\frac{q^n}{n!}w^{(4)}(0), \ldots$ były całkowite. Zachodzi równość:

$$w^{(j)}(x) = \left(\pi^n x^n - \binom{n}{1}\pi^{n-1}x^{n+1} + \binom{n}{2}\pi^{n-2}x^{n+2} - \binom{n}{3}\pi^{n-3}x^{n+3} + \cdots + (-1)^n x^{2n}\right)^{(j)}.$$

Jeżeli $j < n$, to każdy składnik sumy $w^{(j)}(x)$ zawiera zmienną x z dodatnim wykładnikiem, więc $w^{(j)}(0) = 0$. Dalej mamy $w^{(n)}(0) = n!\pi^n$, $w^{(n+1)}(0) = -(n+1)!\binom{n}{1}\pi^{n-1}$,

$$w^{(n+2)}(0) = (n+2)!\binom{n}{2}\pi^{n-2}, \ldots, w^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!.$$

Jeśli więc $\pi = \frac{p}{q}$, to liczby $\frac{q^n}{n!}w^{(j)}(0)$ są całkowite dla każdej nieujemnej liczby całkowitej j. To stwierdzenie kończy dowód. W podobny sposób można udowodnić, że jeśli $\cos r$ jest liczbą wymierną, to r jest liczbą niewymierną.