Ten tekst jest stosunkowo słabo sprawdzony, ale już nie bardzo mam czas go czytać, więc proszę kontrolować go czytając. Za informacje o pomyłkach, błędach będę wdzięczny.

Twierdzenie o ciągłości szeregu potęgowego

Jeśli szereg potęgowy $\sum a_n z^n$ o promieniu zbieżności $\varrho > 0$ jest zbieżny w punkcie p, $|p| = \varrho$, $K > 0$ jest dowolną liczbą rzeczywistą i jeśli $A_K = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < |p| = \varrho \text{ i } \frac{|z-p|}{|p|-|z|} \le K\}$, $\sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dla tych liczb zespolonych z, dla których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny, to $\lim_{z\to p} \sigma(z) = \sigma(p)$ na zbiorze A_K. Jeśli $0 < r < \varrho$, to w zbiorze $D_r\colon = \{z\colon \ |z| \le r\}$ funkcja σ spełnia warunek Lipschitza z pewną stałą $L > 0$ (na ogół stała zależy od r).

Dowód.

Rozpoczniemy od drugiego przypadku. Niech $L = \sum_{n=1}^{\infty} n\bigl|a_n r^{n-1}\bigr| < +\infty$ – ostatnia nierówność wynika z lematu o zbieżności szeregu potęgowego (szereg $\sum n\bigl|a_n r^n\bigr|$ jest zbieżny, więc szereg $\sum \bigl|n a_n r^{n-1}\bigr|$ też jest zbieżny). Niech $|x|, |y| \le r$. Mamy wtedy $\bigl|x^n - y^n\bigr| = \bigl|x - y\bigr| \cdot \bigl|x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}x^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\bigr| \le \bigl|x-y\bigr| \cdot nr^{n-1}$. Stąd wynika, że $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \bigl|a_n\bigr| \cdot \bigl|x^n - y^n\bigr| \le \bigl|x-y\bigr| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \bigl|a_n\bigr| \cdot nr^{n-1} = L\bigl|x-y\bigr|$. Wykazaliśmy więc, że w zbiorze D_r funkcja σ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = \sum_{n=1}^{\infty} n\bigl|a_n r^{n-1}\bigr|$.

Rozważymy teraz drugi przypadek:*. Niech $z \in A_K$ i niech $w = \frac{z}{p}$. Mamy $K \ge \frac{|z-p|}{|p|-|z|} = \frac{|w-1|}{1-|w|}$ i oczywiście $|w| < 1$. Niech $b_n = a_n p^n$. Mamy więc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Niech $s_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Wtedy $b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \ldots = s_0 + (s_1 - s_0)w + (s_2 - s_1)w^2 + \ldots = s_0 + s_1 w + s_2 w^2 + \ldots - \bigl(s_0 w + s_1 w^2 + \ldots\bigr) =$
$= s_0(1-w) + s_1(w - w^2) + s_2(w^2 - w^3) + \ldots = (1-w)\bigl(s_0 + s_1 w + s_2 w^2 + \ldots\bigr)$. Te przekształcenia są możliwe do wykonania, bo szereg $\sum s_n w^n$ jest bezwzględnie zbieżny dla $|w| < 1$, bowiem ciąg (s_n) jest zbieżny do granicy skończonej, zatem jest ograniczony. Z tego wynika, że szereg $\sum s_n w^{n+1}$ też jest zbieżny.

Niech $s = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} s_n$. Niech ε będzie dowolną liczba dodatnią. Istnieje wtedy liczba naturalna n_ε, taka że dla każdej liczby naturalnej $m > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|s_m - s| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Wybierzmy jakąkolwiek liczbę $m > n_\varepsilon$, np. $m = n_\varepsilon + 1$. Załóżmy, że $|w| < 1$. Mamy wtedy:

* Ten przypadek rozważony przez norweskiego matematyka N.H.Abela (1802–1829) jest trudniejszy od poprzedniego, zrozumienie dowodu podanego w tekście jest pożyteczne, choć rozumowanie może sprawiać studentom pewne trudności.

$\left| b_0+b_1w+b_2w^2+\ldots-s\right| = \left|(1-w)\left(s_0+s_1w+s_2w^2+\ldots\right)-s(1-w)\left(1+w+w^2+\ldots\right)\right| =$
$= |1-w|\left|(s_0-s)+(s_1-s)w+(s_2-s)w^2+\ldots\right| \leq$
$\leq |1-w|\left(|s_0-s|+|s_1-s||w|+|s_2-s||w|^2+\ldots+|s_{m-1}-s||w|^{m-1}\right)+$
$+|1-w|\left(|s_m-s||w|^m+|s_{m+1}-s||w|^{m+1}+\ldots\right) <$
$< |1-w|\left(|s_0-s|+|s_1-s||w|+|s_2-s||w|^2+\ldots+|s_{m-1}-s||w|^{m-1}\right)+\dfrac{\varepsilon}{2K}|1-w|(|w|^m+|w|^{m+1}+$
$\ldots) =$
$= |1-w|\left(|s_0-s|+|s_1-s||w|+|s_2-s||w|^2+\ldots+|s_{m-1}-s||w|^{m-1}\right)+\dfrac{\varepsilon}{2K}\dfrac{|1-w|}{1-|w|}|w|^m <$
$< |1-w|\left(|s_0-s|+|s_1-s||w|+|s_2-s||w|^2+\ldots+|s_{m-1}-s||w|^{m-1}\right)+\dfrac{\varepsilon}{2}\,.$

Dotychczas w było dowolną liczbą, dla której $|w|<1$. Nas interesuje granica przy $w\to 1$, $pw\in A_K$. Niech $B=|s_0-s|+|s_1-s|+|s_2-s|+\cdots+|s_{m-1}-s| \geq |s_0-s|+|s_1-s||w|+|s_2-s||w|^2+\cdots+|s_{m-1}-s||w|^{m-1}$. Jeśli $|1-w|<\dfrac{\varepsilon}{2B}$, to $\left|b_0+b_1|w|+b_2|w|^2+\ldots-s\right| < \dfrac{\varepsilon}{2B}\cdot B+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Z tej nierówności wynika, że $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots = b_0+b_1w+b_2w^2+\ldots \xrightarrow[w\to p]{} s=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_np^n$, przy założeniu, że $z\in A_K$. Dowód został zakończony. ■

P O C H O D N E W Y Ż S Z Y C H R Z Ę D Ó W

1. Podstawowe definicje i twierdzenia

Z pochodnymi wyższych rzędów w istocie rzeczy już spotkaliśmy się. Po prostu w kilku przypadkach obliczaliśmy pochodną pochodnej. To oczywiście zdarza się często, gdy trzeba ustalić jakie własności ma funkcja. Przyjmuje się następujące określenie.

Definicja pochodnej wyższego rzędu

Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze zawierającym przedział otwarty I zawierający punkt p. Niech $f^{(0)}(x)=f(x)$ dla każdego x z dziedziny funkcji f. Załóżmy, że funkcja f ma pochodną $(n-1)$–ego rzędu $f^{(n-1)}$ w każdym punkcie przedziału I. Jeśli funkcja $f^{(n-1)}$ ma w punkcie p pochodną $\left(f^{(n-1)}\right)'(p)$, to tę pochodną nazywamy *pochodną n–tego rzędu funkcji f w punkcie p* i oznaczamy symbolem $f^{(n)}(p)$. Jeśli pochodna n–tego rzędu jest *skończona*, to mówimy, że funkcja f jest *n–krotnie różniczkowalna* w tym punkcie. ■

Jest jasne, że $f'=f^{(1)}$. Zamiast pisać $f^{(2)}$ piszemy na ogół f''. Niektórzy matematycy zamiast $f^{(3)}$ piszą f'''.

Przykłady

1. Niech $f(x)=ax+b$. Wtedy dla każdego x mamy $f'(x)=a$, więc $f''(x)=0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wobec tego również $f^{(3)}(x)=0$, a stąd wynika, że również $f^{(n)}(x)=0$ dla każdej liczby naturalnej $n>1$ i każdej liczby rzeczywistej x. ■

2. Niech $f(x)=ax^2+bx+c$. Wtedy $f'(x)=2ax+b$, wobec tego $f''(x)=2a$ i wobec tego dla każdej liczby naturalnej $n>2$ i każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f^{(n)}(x)=0$. ■

3. Niech f będzie wielomianem stopnia m, tzn. istnieją liczby rzeczywiste a_0, $a_1, \ldots, a_m$, przy czym $a_m \neq 0$, takie że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$. Wtedy $f^{(m)}(x) = m!a_m$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdej liczby naturalnej $n > m$ i każdej liczby rzeczywistej x.

Twierdzenie to wykazaliśmy już w przypadku $m = 1, 2$. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielomianów stopnia *mniejszego* niż m. Wynika stąd, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x zachodzi równość $f'(x) = a_1 + 2a_2 + \cdots + ma_mx^{m-1}x$. Ponieważ f' jest wielomianem stopnia $m-1$, więc $(f')^{(m-1)}(x) = (m-1)! \cdot ma_m$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Ponieważ $(f')^{(m-1)} = f^{(m)}$ oraz $(m-1)! \cdot m = m!$, więc dla każdej liczby rzeczywistej x mamy $f^{(m)}(x) = m!a_m$. Stąd oczywiście wynika, że jeśli $n > m$ jest liczbą naturalną, to $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. ■

4. Niech $f(x) = e^x$. Wtedy $f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x$. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej n i każdej rzeczywistej x zachodzi równość $f^{(n)}(x) = e^x$.

5. Niech $f(x) = \sin x$. Wtedy $f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x$. Zatem $f^{(2)}(x) = f''(x) = -\sin x = -f(x)$. Stąd wnioskujemy z łatwością, że $f^{(3)}(x) = -f'(x) = -\cos x$ i $f^{(4)}(x) = -f''(x) = \sin x$. Jasne jest, że od tego momentu będą się kolejno pojawiać, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ i znów $\sin x$ itd. Można więc napisać $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ oraz $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ dla dowolnego $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ i $x \in \mathbb{R}$. ■

6. Podobnie jak w poprzednim przykładzie możemy wykazać, że $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x$ oraz $(\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x$. ■

7. Niech $f(x) = \ln x$. Mamy więc następującą równość $f^{(1)}(x) = f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Wobec tego $f^{(2)}(x) = f''(x) = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2}$. Dalej $f^{(3)}(x) = \left(-x^{-2}\right) = 2x^{-3}$. Stąd wnioskujemy, że $f^{(4)}(x) = 2(-3)x^{-4} = -3!x^{-4}$. Analogicznie $f^{(5)}(x) = 4!x^{-5}$ itd. Ogólnie możemy napisać $f^{(n)}(x) = (\ln(x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ i każdej liczby rzeczywistej x. ■.

8. Obliczymy kilka pochodnych funkcji tangens. Mamy $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Wobec tego zachodzi równość $(\operatorname{tg} x)'' = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)' = 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x)$ – skorzystaliśmy z wzoru na pochodną funkcji złożonej. Stąd $(\operatorname{tg} x)^{(3)} = 2(1 + 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2(1 + 4\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x)$, a stąd $(\operatorname{tg} x)^{(4)} = 2(8\operatorname{tg} x + 12\operatorname{tg}^3 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 8(2\operatorname{tg} x + 5\operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg}^5 x)$. Te obliczenia można kontynuować, jednak w tym przypadku nie da się napisać równie prosto jak w poprzednich przypadkach ogólnego wzoru na n–tą pochodna funkcji. ■

9. Znajdziemy teraz wzór na n–tą pochodną funkcji $\dfrac{x}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{3}{x+3} - \dfrac{2}{x+2}$. W tym celu starczy znaleźć n–tą pochodną funkcji postaci $\dfrac{1}{x+c}$. Mamy $\left(\dfrac{1}{x+c}\right)' = -(x+c)^{-2}$. Stąd $\left(\dfrac{1}{x+c}\right)'' = -(-2)(x+c)^{-2-1} = 2(x+c)^{-3}$. Rozumując dalej w ten sam sposób otrzymujemy $\left(\dfrac{1}{x+c}\right)^{(3)} = -6(x+c)^{-4} = -6!(x+c)^{-4}$. Bez żadnych trudności piszemy wzór ogólny na n–tą pochodną tej funkcji: $\left(\dfrac{1}{x+c}\right)^{(n)} = (-1)^n n!(x+c)^{-n-1}$. Stąd wynika już od razu, że $\left(\dfrac{x}{x^2+5x+6}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\left(3(x+3)^{-n-1} - 2(x+2)^{-n-1}\right)$. Wypada jednak zaznaczyć, że bez rozłożenia na czynniki mianownika nasze szanse na sukces byłyby znikome. ■

10. Wykazaliśmy poprzednio, że jeśli funkcja jest różniczkowalna na pewnym *przedziale* i jej pochodna jest na tym przedziale równa 0, to funkcja ta jest stała. Załóżmy teraz, że $f''(x) = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$ dla pewnych $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy na mocy poprzednio wykazanego stwierdzenia funkcja f' jest stała na przedziale (a,b). Niech $f'(x) = A$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Niech $g(x) = f(x) - Ax$. Zachodzi oczywista równość $g'(x) = 0$ dla każdej liczby $x \in (a,b)$. Wobec tego g jest funkcją stałą. Oznaczając jej jedyną wartość przez B otrzymujemy równość $B = g(x) = f(x) - Ax$. Stąd od razu wynika, że $f(x) = Ax + B$ dla każdej liczby $x \in (a,b)$. Wykazaliśmy więc, że jeśli druga pochodna jest tożsamościowo równa 0, to funkcja jest wielomianem stopnia nie większego niż 1. Podobnie można wykazać, że jeśli trzecia pochodna jest tożsamościowo równa 0 na pewnym przedziale, to funkcja jest na tym przedziale wielomianem stopnia nie większego niż 2. Jeśli bowiem $f^{(3)}(x) = 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to na mocy poprzedniego stwierdzenia funkcja f' jest wielomianem postaci $Ax + B$. Bez trudu zgadujemy, że $\left(\frac{1}{2}Ax^2 + Bx\right)' = Ax + B$. Stąd wynika, że $\left(f(x) - \frac{1}{2}Ax^2 - Bx\right)' = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Teraz możemy stwierdzić, że funkcja $f(x) - \frac{1}{2}Ax^2 - Bx$ jest stała, co kończy dowód tego, że f jest wielomianem, którego stopień jest mniejszy niż 3. Jest całkowicie jasne, że kontynuując to rozumowanie wykażemy, że jeśli n–ta pochodna pewnej funkcji jest równa 0 w każdym punkcie pewnego przedziału, to funkcja ta na tym przedziale jest wielomianem, którego stopień jest mniejszy niż n. ■

11. Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną na pewnym przedziale oraz że dla pewnej liczby rzeczywistej k równość $f'(x) = kf(x)$ zachodzi dla wszystkich x. Wykażemy, że w tej sytuacji istnieje stała $C \in \mathbb{R}$, taka że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = Ce^{kx}$. W celu uzyskania tej równości starczy wykazać, że iloraz $\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$ jest funkcja stałą, czyli że pochodna tego ilorazu jest wszędzie równa 0. Mamy $\left(\dfrac{f(x)}{e^{kx}}\right)' = \dfrac{f'(x)e^{kx} - ke^{kx}f(x)}{e^{2kx}} = \dfrac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}} = 0$ – ostatnia równość wynika z założenia o funkcji f. Wykazaliśmy więc, że iloraz jest funkcją stałą. Tę stałą oznaczamy przez C. Jasne jest, że $f(x) = Ce^{kx}$.

Rozważymy teraz nieco bardziej skomplikowaną zależność. Mianowicie założymy, f jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w każdym punkcie prostej * oraz że dla każdej liczby rzeczywistej x

* Nie jest istotne, że dziedziną jest prosta, może być dowolny przedział.

zachodzi równość $f''(x) = f(x)$. Bez trudu można podać dwa przykłady funkcji spełniających to równanie: $g(x) = e^x$ oraz $h(x) = e^{-x}$. Mając dwa, można ich podać o nieskończenie wiele. Jeśli c, d są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to funkcja $cg(x)+dh(x) = ce^x + de^{-x}$ również spełnia to równanie. Jasne jest, że również funkcja $u(x) = f(x) - cg(x) - dh(x)$ spełnia to równanie. Liczby c i d można dobrać w ten sposób, że $u(0) = 0 = u'(0)$ – wystarczy rozwiązać układ równań: $f(0) = c+d$, $f'(0) = c - d$ traktując c i d jako niewiadome, a $f(0)$ i $f'(0)$ jako dane liczby. Otrzymujemy $c = \frac{1}{2}(f(0) + f'(0))$ oraz $d = \frac{1}{2}(f(0) - f'(0))$. Poszukujemy więc dwukrotnie różniczkowalnej funkcji u, takiej że dla każdego x zachodzi równość $u''(x) = u(x)$ oraz $u'(0) = 0 = u(0)$. Wykażemy, że u jest funkcją zerową. Zauważmy najpierw, że $u''u' = uu'$, i wobec tego $\left(\frac{1}{2}(u')^2\right)' = \left(\frac{1}{2}u^2\right)'$. Stąd wynika, że funkcja $(u')^2 - u^2$ ma zerową pochodną, więc jest stała. Ponieważ $(u'(0))^2 - u(0)^2 = 0$, więc funkcja $(u')^2 - u^2$ jest zerowa, czyli $u'(x)^2 = u(x)^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Załóżmy, że funkcja u przyjmuje w pewnym punkcie p wartość różną od 0. Są dwie możliwości: $u'(p) = u(p) \neq 0$ lub $u'(p) = -u(p) \neq 0$. Ponieważ obie funkcje u i u' są ciągłe, więc w pierwszym przypadku równość $u'(x) = u(x)$ zachodzi dla wszystkich x dostatecznie bliskich p, zaś w drugim przypadku dla wszystkich x dostatecznie bliskich p zachodzi równość $u'(x) = -u(x)$. *Dostatecznie bliskich* oznacza w tym przypadku dla wszystkich x z dowolnego przedziału przedziału I zwierającego punkt p, na którym funkcja u nie ma pierwiastków. Z pierwszej równości wynika, że istnieje stała C, taka że $u(x) = Ce^x$ dla wszystkich x z przedziału I. Z drugiej równości wynika istnienie stałej C, takiej że dla wszystkich x z przedziału I zachodzi równość $u(x) = Ce^{-x}$. Można założyć, że I jest maksymalnym przedziałem, który zawiera punkt p i w którym funkcja u nie ma pierwiastków. Oczywiście 0 nie leży w przedziale I. Wobec tego między p i 0 leży koniec q przedziału I, drugi koniec przedziału I znajduje się po przeciwnej stronie punktu p i nie jest wykluczone, że jest nieskończonością. Jest jasne, że $u(q) = 0$ – gdyby tak nie było, to przedział I sięgałby poza q. Ponieważ funkcja u jest ciągła i na przedziale I obowiązuje wzór $u(x) = Ce^x$ lub wzór $u(x) = Ce^{-x}$, więc w punkcie q mamy $u(q) = Ce^{\pm x}$. Jednocześnie $u(q) = 0$. Z dwóch ostatnich stwierdzeń wynika, że $C = 0$, a to oznacza, że wbrew uczynionemu założeniu $u(p) = Ce^{\pm p} = 0$. Wykazaliśmy więc, że u jest funkcją zerową, a to oznacza, że funkcja f jest postaci $ce^x + de^{-x}$. ■

12. Wykazaliśmy poprzednio , że równości $f^{(n)}(x) = 0$, $f'(x) = kf(x)$, $f''(x) = f(x)$ spełnione w każdym punkcie przedziału wymuszają, by funkcja f wyrażała się prostym wzorem. Omówimy jeszcze jeden przykład tego typu. Załóżmy mianowicie, że dla wszystkich punktów pewnego przedziału I spełniona jest zależność $f''(x) = -f(x)$.** Wykażemy, że w tej sytuacji istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$, takie że dla każdej liczby $x \in I$ zachodzi równość $f(x) = a\cos x + b\sin x$. Niech p ozna-

** Taka zależność, a dokładniej $f'' = -\frac{g}{l}f$ pojawia się przy analizowaniu ruchu wahadła matematycznego o długości l przy założeniu, że amplituda jest tak mała, że przybliżenie $f \approx \sin f$ jest dostatecznie dokładne, g to przyspieszenie ziemskie.

cza dowolny punkt przedziału I. Jasne jest, że w każdym punkcie przedziału I zachodzi równość $(a\cos x + b\sin x)'' = -(a\cos x + b\sin x)$, tzn. funkcja postaci $a\cos x + b\sin x$ spełnia rozpatrywane równanie. Wybierzemy liczby a i b tak, by miały miejsce równości $f(p) = a\cos p + b\sin p$ oraz $f'(p) = -a\sin p + b\cos p$, tzn. $a = f(p)\cos p - f'(p)\sin p$ oraz $b = f(p)\sin p + f'(p)\cos p$. Niech $u(x) = f(x) - a\cos x - b\sin x$. Jest jasne, że $u''(x) = -u(x)$ dla każdej liczby $x \in I$ oraz że $u(p) = 0 = u'(p)$. Stąd wynika, że $\big((u'(x))^2 + (u(x))^2\big)' = 2\,(u''(x)u'(x) + u'(x)u(x)) = 0$, więc funkcja $(u'(x))^2+(u(x))^2$ jest stała na przedziale I, zatem $(u'(x))^2+(u(x))^2 = (u'(p))^2+(u(p))^2 = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Suma *kwadratów* liczb rzeczywistych jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy obie te liczby są zerami. Wobec tego dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $u(x) = 0$, a zatem $f(x) = a\cos x + b\sin x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Okazało się, że również w tym przypadku można łatwo opisać wszystkie funkcje spełniające równanie $f'' = -f$. Tego typu równania nazywane są równaniami różniczkowymi. Istnieje obszerna teoria równań różniczkowych. Nie mamy tu możliwości omawiania jej. Jest ona stosowana w wielu dziedzinach poza matematyką, przede wszystkim w fizyce i w technice. Również w ekonomii. Napisano na ten temat wiele książek, m.in. prof. Tomasz Żylicz napisał specjalnie dla studentów ekonomii skrypt „Wykłady z równań różniczkowych i różnicowych dla studentów ekonomii„ Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1988. Z tych książek można dowiedzieć się więcej na temat równań tego typu. ■

Teraz zauważmy, że liczenie pochodnych wyższego rzędu polega na obliczaniu pochodnych rzędu pierwszego, więc właściwie już się z tym zapoznaliśmy. Jeśli chodzi o wzory ogólne, to oczywistym – i w zasadzie nie wartym wspomnienia – jest wzór na n–tą pochodną sumy dwu funkcji różniczkowalnych n–krotnie: $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$. Leibniz zauważył, że jeśli funkcje f i g są n–krotnie różniczkowalne, to zachodzi wzór bardzo podobny do wzoru dwumianowego Newtona:

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)} g^{(j)} \tag{Leibniz}$$

Prosty dowód tego wzoru wykorzystujący wzór na pochodną iloczynu dwu funkcji i znaną równość $\binom{n}{j} + \binom{n}{j+1} = \binom{n+1}{j+1}$, dzięki której współczynniki dwumianowe można obliczać za pomocą trójkąta Pascala, pozostawiamy czytelnikom w charakterze bardzo prostego ćwiczenia. Wzory na n–tą pochodną złożenia i funkcji odwrotnej są na tyle skomplikowane, że właściwie w ogóle nieprzydatne, zresztą trudno je znaleźć w literaturze.

Przejdziemy teraz do sformułowania jednego z najważniejszych wzorów analizy matematycznej, tzw. wzoru Taylora. Pierwszą pochodną funkcji wprowadziliśmy po to, by móc przybliżyć funkcję w pobliżu interesującego nas punktu wielomianem stopnia pierwszego. Drugie pochodne i pochodne wyższych rzędów pojawiły się w kilku miejscach w związku z bardziej szczegółowym badaniem funkcji . Okazuje się, że definicję pochodnej, związaną z przybliżaniem funkcji wielomianem stopnia pierwszego lub zerowego, można uogólnić. Tym zajmiemy się teraz. Efektem będzie zapowiadany wzór Taylora.

Poprzednio błąd przybliżenia miał być mały w porównaniu z pierwszą potęgą zmiany argumentu. Teraz zażądamy, by był mały w porównaniu z wyższymi potęgami h. Niestety nie będzie to możliwe przy użyciu wielomianów stopnia nie przekraczającego 1 – będziemy zmuszeni do użycia wielomianów stopnia wyższego.

Załóżmy, że $0 < |h| < 1$. Wobec tego $|h| > h^2 > |h|^3 > h^4 > \ldots$. Jasne jest też, że jeśli h jest bardzo blisko 0, to h^2 jest znacznie bliżej zera niż h, h^3 znacznie bliżej niż h^2 itd. Jest tak, bo $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2}{h} = 0$ i ogólnie, jeśli $m > n$, to $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^m}{h^n} = 0$. Można myśleć o tym tak: jeżeli h jest bardzo małe i $m > n$, to liczba h^m stanowi znikomą część liczby h^n, oczywiście obie są wtedy bardzo małe, ale jedna jest istotnie mniejsza niż druga.

Wobec tego, z naszego punktu widzenia, różnica między dwiema funkcjami f i g będzie mała, jeśli będzie jeśli będzie dążyć do 0 *po podzieleniu przez* h^n, gdzie oznacza liczbę naturalną. Następujący lemat podaje warunek konieczny i dostateczny na to, by dwie funkcje były w tym sensie jedna drugiej.

Lemat o funkcjach ściśle przylegających

Jeśli funkcje f i g są n–krotnie różniczkowalne w punkcie 0, to $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy pochodne funkcji f i g w punkcie 0 są równe do n–tego rzędu włącznie: $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ dla $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Dowód. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$. Niech $r(x) = f(x) - g(x)$. Trzeba udowodnić, że $r(0) = r'(0) = r''(0) = \ldots = r^{(n)}(0) = 0$. Załóżmy najpierw, że $0 \leq j \leq n$. Mamy wtedy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x)}{x^j} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x)}{x^n} \cdot \lim\limits_{x\to 0} x^{n-j} = 0$, bo pierwsza granica jest równa 0, a druga 0 lub 1 w zależności od tego, czy $j < n$ czy też $j = n$. Mamy $\lim\limits_{x\to 0} r(x) = 0$. Stąd i z tego, że funkcja r jest ciągła w punkcie 0, jako różniczkowalna, wynika, że $r(0) = 0$. Mamy $0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x)-r(0)}{x} = r'(0)$. Wobec tego $r'(0) = 0$. Teraz wykażemy, że $r''(0) = 0$ (zakładamy oczywiście, że $n \geq 2$). Stosujemy teraz regułę de l'Hospitala: $0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r'(x)}{2x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r'(x)-r'(0)}{x} = \dfrac{1}{2} r''(0)$. Wykażemy teraz w taki sam sposób, że również trzecia pochodna równa jest 0:

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{r'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{r''(x)}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{r''(x)-r''(0)}{x} = \frac{1}{6} r^{(3)}(0).$$

Jasne jest, że tę procedurę można kontynuować.

Wykażemy teraz, że jeśli $r(0) = r'(0) = r''(0) = \ldots = r^{(n)}(0) = 0$, to $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x)}{x^n} = 0$. Stosujemy regułę de l'Hospitala: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r'(x)}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r''(x)}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\ldots 2x}$. Mamy dalej $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r^{(n-1)}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(0)}{x} = r^{(n)}(0) = 0$. Dowód lematu został zakończony. ■

Wniosek z dowodu.

Jeśli funkcja r jest $n-$krotnie różniczkowalna w punkcie 0 i $r(0) = r'(0) = r''(0) = r^{(n-1)}(0) = 0$, to $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r(x)}{x^n} = \dfrac{r^{(n)}(0)}{n!}$. ■

Z lematu o funkcjach ściśle przylegających wynika, że jeśli chcemy przybliżyć funkcję w otoczeniu punktu p wielomianem w tak, by błąd przybliżenia był mały w porównaniu z h^n, to pochodne, do $n-$tego rzędu włącznie, tego wielomianu w punkcie 0 muszą być równe odpowiednim pochodnym funkcji f w punkcie p: $f^{(j)}(p) = w^{(j)}(0)$. Jeżeli $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $w^{(j)}(0) = j!a_j$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Stąd wynika, że powinno być $a_j = \dfrac{f^{(j)}(p)}{j!}$. To motywuje wprowadzenie następującego określenia.

Definicja wielomianu Taylora i reszty

Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie p pochodną $n-$tego rzędu. $n-$tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie p nazywamy wielomian $f(p)+f'(p)h+\dfrac{f''(p)}{2!}h^2+\dfrac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n$ zmiennej h. $n-$tą resztą nazywamy różnicę

$$r_n(h) = f(p+h) - \left(f(p)+f'(p)h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n\right) \quad ■$$

Oczywiście wielomian Taylora określony jest dla wszystkich liczb h, natomiast reszta tylko dla takich h, dla których punkt $p+h$ znajduje się w dziedzinie funkcji f. Jasne jest też, że po to, by móc mówić o pochodnej $f^{(n)}(p)$ trzeba założyć istnienie pochodnej $f^{(n-1)}$ oraz wszystkich pochodnych niższego rzędu w pewnym otoczeniu punktu p. Zachodzi następujące

Twierdzenie G.Peano

Jeśli f jest funkcją $n-$krotnie różniczkowalną w punkcie p, to $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r_n(h)}{h^n} = 0$.

Równość $f(p+h) = f(p)+f'(p)h+\dfrac{f''(p)}{2!}h^2+\dfrac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n+r_n(h)$ nazywana bywa wzorem Taylora z resztą Peano, jeśli dodamy informację zawartą w twierdzeniu Peano.
Wynika ono natychmiast z lematu o funkcjach ściśle przylegających. ■

Również z tego lematu wynika, że innego wyboru nie ma, jeśli chcemy mieć tak dokładne przybliżenie i nie chcemy zwiększać stopnia wielomianu ponad niezbedne minimum.

Twierdzenie o jednoznaczności wielomianu Taylora

Jeśli funkcja f jest $n-$krotnie różniczkowalna w punkcie p i w jest wielomianem stopnia nie większego niż n, tzn. istnieją liczby a_0, $a_1, \ldots, a_n$, takie że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ oraz $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(p+h)-w(p)}{h^n} = 0$, to dla każdego $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi wzór $f^{(j)}(p) = j!a_j$, a więc w jest wielomianem Taylora funkcji f w punkcie p. ■

Nadmienić wypada, że Taylor był współczesny Newtonowi, wzór Taylora znaleziony został od razu. Idea przybliżania dokładniejszego niż liniowe była obecna w omawianej teorii od samego początku! Również współczesny Newtonowi był Szkot o nazwisku Maclaurin, którego nazwiskiem opatrywany jest wzór Taylora w przypadku $p=0$. Zaznaczmy jeszcze, że z wzorem Taylora związane jest szereg Taylora funkcji: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n$. Szereg ten może mieć dodatni promień zbieżności lub zerowy. Po to, by w ogóle można było o nim mówić trzeba założyć, że funkcja ma w punkcie p pochodne wszystkich rzędów. Jednak nawet wtedy może mieć on zerowy promień zbieżności lub mieć sumę różną od $f(p+h)$. W przypadku $p=0$ mówi się zazwyczaj o szeregu Maclaurina. Czytelnik poznał już rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji wykładniczej o podstawie e: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, funkcji sinus: $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, funkcji kosinus: $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, funkcji arkus tangens: $\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ oraz rozwinięcie w szereg Taylora funkcji ln wokół punktu $p=1$: $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, funkcji potęgowej o wykładniku $a\in\mathbb{R}$ wokół punktu $p=1$: $(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$, również funkcji arkus sinus i funkcji $\frac{x}{x^2+5x+6}$.

Definicja lokalnego ekstremum

Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze zawierającym przedział I o środku w punkcie p ma w tym punkcie lokalne maksimum wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przedział $J\subset I$ o środku w punkcie p, taki że jeśli $x\in J$, to $f(x)\le f(p)$. Jeśli nierówność jest ostra dla $x\neq p$, to mówimy, że lokalne maksimum jest właściwe. Analogicznie określamy lokalne minimum oraz lokalne minimum właściwe. Jeśli funkcja ma w punkcie p lokalne maksimum lub lokalne minimum, to mówimy, że ma w tym punkcie lokalne ekstremum. ■

Jasne jest, że funkcje x^2, x^4, x^6 ... mają w punkcie 0 minima, natomiast funkcje przeciwne $-x^2$, $-x^4, -x^6$ ... mają w punkcie 0 maksima. Funkcje x, x^3, x^5... nie mają w punkcie 0 ekstremów, nawet lokalnych. Udowodnimy teraz twierdzenie pozwalające w licznych przypadkach łatwo stwierdzić, czy funkcja n–krotnie różniczkowalna w punkcie p ma w nim lokalne ekstremum.

Twierdzenie o lokalnych ekstremach

Załóżmy, że funkcja f jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie p oraz że zachodzą równości $0=f'(p)=f''(p)=\ldots=f^{(n-1)}(p)$ i nierówność $f^{(n)}(p)\neq 0$. Wtedy jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja f nie ma w punkcie p lokalnego ekstremum – w dowolnie małym otoczeniu punktu p przyjmuje zarówno wartości większe niż w punkcie p oraz wartości większe niż w punkcie p, jeśli natomiast n jest liczbą parzystą, funkcja to f ma w punkcie p lokalne ekstremum właściwe: minimum, gdy $f^{(n)}(p)>0$, maksimum – w przypadku $f^{(n)}(p)<0$.

Dowód. Skorzystamy z wzoru Taylora:

$$f(p+h)=f(p)+\frac{f'(p)}{1!}h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n+r_n(h)$$

Wobec założeń o pochodnych funkcji f w punkcie p możemy napisać

$$f(p+h)=f(p)+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n+r_n(h))=f(p)+h^n\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!}+\frac{r_n(h)}{h^n}\right)$$

Ponieważ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r_n(h)}{h^n}=0$, więc istnieje $\delta>0$, taka że jeśli $0<|h|<\delta$, to $\left|\frac{r_n(h)}{h^n}\right|<\left|\frac{f^{(n)}(p)}{n!}\right|$. Znak sumy dwu liczb jest taki sam jak znak tej z nich, której wartość bezwzględna jest większa. W przypadku sumy $\frac{f^{(n)}(p)}{n!}+\frac{r_n(h)}{h^n}$ jest on więc, przy założeniu, że $0<|h|<\delta$ taki jak znak liczby $f^{(n)}(p)$ ($n!$ nie ma wpływu znak). Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to znak iloczynu $h^n\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!}+\frac{r_n(h)}{h^n}\right)$ zmienia się wraz ze zmianą znaku h. Jeśli n jest liczbą parzystą, to znak ten jest niezależny od znaku h: w przypadku $f^{(n)}(p)<0$ liczba $h^n\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!}+\frac{r_n(h)}{h^n}\right)$ jest ujemna, zaś w przypadku $f^{(n)}(p)>0$ – dodatnia. Stąd teza wynika od razu. ■

Podany przed chwilą dowód ilustruje jak stosowany jest wzór Taylora: Pewna własność przysługuje wielomianowi Taylora, reszta nie jest w stanie jej zmienić, bo jest za mała. Oczywiście istotnym założeniem jest $f^{(n)}(p)\neq 0$ – bez niego nie mamy podstaw do twierdzenia, że reszta jest mała w porównaniu z wielomianem Taylora funkcji $f(x)-f(p)$, przeciwnie w takim przypadku wszystkie informacje o zachowaniu się funkcji w pobliżu punktu p zawarte są w reszcie, o której niewiele wiemy! Po drugie wypada podkreślić, że mówimy tu jedynie o zachowaniu się funkcji w pobliżu punktu p, na nic więcej nie możemy liczyć, bo założenia, które uczyniliśmy dotyczą jedynie pochodnych w tym jednym punkcie! O wielkości liczby δ również nic nie możemy powiedzieć, jeśli w konkretnej sytuacji musimy coś konkretnego o niej powiedzieć, to wymaga to dalszego badania konkretnej funkcji.*

Przykłady cd.

13. Niech $f(x)=3x^4-28x^3+84x^2-96x$. Mamy $f'(x)=12x^3-84x^2+168x-96=12(x^3-7x^2+14x-8)=12(x-1)(x-2)(x-4)$. Pochodna f' zeruje się jedynie w punktach 1,2,4. Druga pochodna jest równa $f''(x)=36x^2-168x+168=12(3x^2-14x+14)$. wobec tego $f''(1)>0$, $f''(2)<0$ i $f''(4)>0$, więc z twierdzenia o lokalnych ekstremach wynika, że w punktach

* W wielu podręcznikach słowa maksimum, minimum, ekstremum oznaczają lokalne maksimum, lokalne minimum, lokalne ekstremum. Zdecydowaliśmy się na nieco dłuższe terminy, by uniknąć częstych nieporozumień związanych z krótszymi, wielu studentów, zwłaszcza słabiej przygotowanych, myli np. lokalne maksima z globalnymi, co może prowadzić do zupełnie bezsensownych wniosków.

1 i 4 funkcja f ma lokalne minima, a w punkcie 2 ma lokalne maksimum. Z tego twierdzenia już więcej nic nie jesteśmy w stanie wywnioskować. Natomiast z twierdzenia o monotoniczności funkcji różniczkowalnych wynika, że na każdym z przedziałów $(-\infty,1]$, $[1,2]$, $[2,4]$ oraz $[4,+\infty)$ funkcja f jest ściśle monotoniczna, bowiem w ich punktach wewnętrznych pochodna f' funkcji f nie zeruje się. Mamy $f(1)=-37$, $f(2)=-32$ oraz $f(4)=-64$. Wiemy więc, że funkcja f na przedziale $[1,2]$ rośnie, na przedziale $[2,4]$ maleje. Obliczywszy $f(0)=0>-37=f(1)$ stwierdzamy, że na przedziale $(-\infty,1]$ ta funkcja maleje (wcześniej już stwierdziliśmy, że f jest na tej półprostej ściśle monotoniczna!). Analogicznie z tego, że $f(5)=-5>-64=f(4)$ wynika, że na półprostej $[4,+\infty)$ funkcja f jest ściśle rosnąca. Z tego wszystkiego wynika, że $f(4)=-64$ jest najmniejszą wartością funkcji f na całej prostej, $f(1)=-37$ jest najmniejszą wartością funkcji f na przedziale $(-\infty,2]$ (to nie jest maksymalny przedział, na którym ta wartość jest najmniejsza, ale ustalenie maksymalnego wymagałoby dalszych rozumowań, np. rozwiązania równania $f(x)=f(1)$ w przedziale $[2,4]$). ■

14. Zajmiemy się tą samą funkcją, którą badaliśmy w przykładzie 13: $f(x)=3x^4-28x^3+84x^2-96x$. Teraz ustalimy jaka jest największa wartość tej funkcji na przedziale $[1,5]$. Pochodna w tym przedziale zeruje się w punktach 1, 2, 4, w punktach 1 i 4 druga pochodna jest dodatnia, więc funkcja ma w nich lokalne minima *właściwe*, więc na pewno nie ma tam wartości największej. Ponieważ f jest ciągła i rozpatrujemy ją na przedziale domkniętym i ograniczonym, więc w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość największą (spośród przyjmowanych na tym przedziale). *standardowy błąd polega na stwierdzeniu, że ponieważ jedynym punktem zerowania się pochodnej oprócz punktów, w których funkcja ma lokalne minima jest 2, więc $f(2)=-32$ jest wartością największą funkcji f na przedziale* $[1,5]$. W rzeczywistości po ustaleniu, gdzie pochodna się zeruje należy rozważyć jeszcze końce przedziału oraz punkty, w których pochodna nie istnieje (w tym przypadku istnieje wszędzie). Wartość największa musi być przyjmowana w jednym z tych punktów. Wobec tego w naszym przypadku jest jeszcze jedna możliwość $x=5$, drugi koniec przedziału już został rozważony, bo w punkcie $x=1$ pochodna jest równa 0. Mamy $f(5)=-5>-32=f(2)$, więc największą wartością funkcji f na przedziale $[1,5]$ jest liczba $-5=f(5)$. Dodajmy, że ten przykład jest bardzo prosty, bo chodzi jedynie o przedstawienie roli poszczególnych twierdzeń w badaniu funkcji. ■

15. Pokażemy teraz jak można stosować wzór Taylora do obliczania granic funkcji. Obliczymy mianowicie granicę ilorazu $\dfrac{(\ln(\cos x))^5}{(x^2-\sin^2 x)(\operatorname{tg}^2 x)(\cos x-\cos 2x)^2}$ przy $x\longrightarrow 0$. Oczywiście licznik i mianownik dążą do 0, więc można spróbować zastosować regułę de l'Hospitala. Jednak licznik i mianownik wyglądają dosyć nieprzyjemnie i można spodziewać się, że po zróżniczkowaniu nie będą wyglądać lepiej. Wobec tego należy zadać sobie pytanie: jak szybko licznik dąży do 0. Potem to samo pytanie należy odnieść do mianownika. Dokładniej: dla jakiej liczby naturalnej

n granica $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(\cos x))^5}{x^n}$ jest skończona i różna od 0. Jeśli taka liczba istnieje, to będziemy mówić, że licznik dąży do 0 tak szybko jak x^n. Wiemy, że $\ln(1+y) = y + r(y)$, gdzie r jest taką funkcją, że $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{r(y)}{y} = 0$ – wynika to z wzoru Taylora zastosowanego do funkcji ln w punkcie $p = 1$ i $n = 1$, czyli z wzoru na pochodną logarytmu. Jednocześnie zachodzi równość $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \varrho(x)$, gdzie ϱ jest taką funkcją, że $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varrho(x)}{x^2} = 0$ – znów stosujemy wzór Taylora, tym razem chodzi o funkcję kosinus w punkcie 0, $n = 2$.* Stąd wnioskujemy, że $\ln(\cos x) =$ $= \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \varrho(x)\right) = \ln\left(1 + \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + \varrho(x)\right)\right) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \varrho(x) + r\left(-\dfrac{1}{2}x^2 + \varrho(x)\right)$. Mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varrho(x)}{x^2} = 0 \text{ i } \lim_{x\to 0}\frac{r\left(-\frac{1}{2}x^2 + \varrho(x)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{r\left(-\frac{1}{2}x^2 + \varrho(x)\right)}{-\frac{1}{2}x^2 + \varrho(x)}\frac{-\frac{1}{2}x^2 + \varrho(x)}{x^2} = 0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

więc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$. Wykazaliśmy więc, że licznik zachowuje się jak $(x^2)^5 = x^{10}$. Teraz zajmiemy się kolejno poszczególnymi członami mianownika. Zaczniemy od $x^2 - \sin^2 x$. Mamy $\sin x =$ $x - \dfrac{x^3}{3!} + \tilde{r}(x)$, gdzie $\dfrac{\tilde{r}(x)}{x^3} \longrightarrow 0$, gdy $x \longrightarrow 0$. Wobec tego zachodzi równość $x^2 - \sin^2 x =$ $x^2 - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \tilde{r}(x)\right)^2 = 2x\dfrac{x^3}{3!} + \widehat{r}(x)$, gdzie przez $\widehat{r}(x)$ oznaczyliśmy sumę wszystkich pozostałych (niezredukowanych) składników tj. $-\left(\dfrac{x^3}{3!}\right)^2 - (\tilde{r}(x))^2 - 2x\tilde{r}(x) + 2\dfrac{x^3}{3!}\tilde{r}(x)$. Jasne jest, że $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\widehat{r}(x)}{x^4} = 0$. Stąd łatwo wynika, że $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = 2\dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{3}$. Jasne jest, że $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, więc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} = 1$. Pozostał ostatni czynnik mianownika. Zastosujemy wzór Maclaurina dla funkcji kosinus i $n = 2$. Mamy $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \tilde{\varrho}(x)$, gdzie $\tilde{\varrho}$ jest taką funkcją, że $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tilde{\varrho}(x)}{x^2} = 0$ (w rzeczywistości dzięki temu, że wiemy jak przedstawić można funkcję kosinus w postaci sumy szeregu potęgowego, możemy napisać, że $\tilde{\varrho}(x) = \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$). Wobec tego $\cos x - \cos(2x) =$ $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \tilde{\varrho}(x) - \left(1 - \dfrac{(2x)^2}{2!} + \tilde{\varrho}(2x)\right) = \dfrac{3}{2}x^2 + \widehat{\varrho}(x)$, gdzie $\widehat{\varrho}$ jest taką funkcją, że $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\widehat{\varrho}(x)}{x^2} = 0$. Wobec tego $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \cos(2x)}{x^2} = \dfrac{3}{2}$, zatem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x - \cos(2x))^2}{x^4} = \dfrac{9}{4}$. Pozostało stwierdzić, że szukana granica to $\dfrac{(-\frac{1}{2})^5}{\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{9}{4}} = -\dfrac{1}{24}$. Postępowanie nasze polegało tu na tym, że zastępowaliśmy funkcje sinus, kosinus, logarytm naturalny wielomianami *odpowiedniego* stopnia, co ułatwiało obliczanie granicy. Można zastosować regułę de l'Hospitala zamiast wzoru Taylora, ale wzór Taylora jest

* Ponieważ $\ln(1+y) = y - \dfrac{1}{2}y^{+}\cdots$, więc $r(y) = -\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} - \cdots$. Analogicznie stosując wzór $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots$ otrzymujemy równość $\varrho(x) = \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$.

wygodniejszy i nie wymaga większego namysłu. ■

W ostatnim przykładzie pojawiały się w dużych ilościach funkcje, których dokładne definicje nie miały żadnego znaczenia: r, ϱ, $\tilde{r}$, $\tilde{\varrho}$, $\widehat{r}$, $\widehat{\varrho}$. Istotne było jedynie to, że po podzieleniu przez odpowiednią potęgę funkcji x granicą każdej z nich przy $x \longrightarrow 0$ była liczba 0. Zwykle nie wprowadza się tylu oznaczeń. Stosowany jest symbol o. Przyjmujemy mianowicie następującą umowę: piszemy $f(x) = o(g(x))$ przy $x \longrightarrow p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Można więc napisać np. $\ln(1+y) = y + o(y)$ przy $y \longrightarrow 0$, bo $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)-y}{y} = 0$. Można też napisać, że $x^{10} = o(e^x)$ przy $x \longrightarrow +\infty$, bo $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = 0$. Mamy również $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ – to są oczywiste wnioski z wzoru Taylora. Przy użyciu właśnie wprowadzonego oznaczenia można zapisać twierdzenie Peano w następujący sposób:

$$f(p+h) = f(p) + \frac{f'(p)}{1!}h + \frac{f''(p)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + o(h^n) \quad \text{przy } h \longrightarrow 0\,.$$

Jasne jest, że jeśli $f(x) = o(x^k)$ przy $x \longrightarrow 0$, to $x^n f(x) = o(x^{n+k})$ przy $x \longrightarrow 0$. Jeśli $f(x) = 0(x^k)$ przy $x \longrightarrow 0$ i $g(x) = o(x^n)$ przy $x \longrightarrow 0$, to $f(x)g(x) = o(x^{k+n})$ przy $x \longrightarrow 0$ oraz $f(x) + g(x) = o(x^l)$ przy $x \longrightarrow 0$, gdzie $l = \min(k,n)$. W przypadku sumy rezultat nie jest oczywiście „dokładny” . Może się zdarzyć, że suma dąży do 0 „szybciej”, bo człony decydujące o prędkości zbieżności mogą się zredukować przy dodawaniu lub odejmowaniu. Pokażemy teraz jak przy użyciu symbolu o można opisać rozwiązanie zadania przedstawione w przykładzie 15.

15'. Mamy znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))^5}{(x^2 - \sin^2 x)(\operatorname{tg}^2 x)(\cos x - \cos 2x)^2}$. Skorzystamy z następujących równości $\ln(1+x) = x + o(x)$, $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ i $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ przy $x \longrightarrow 0$. Z tych równości wynika, że przy $x \longrightarrow 0$ zachodzi wzór $\ln(\cos x) = \ln(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)) = = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ – ostatni wzór wynika stąd, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = = -\frac{1}{2} \neq \pm\infty$. Rozumując dalej w taki sam sposób otrzymujemy $x^2 - \sin^2 x = = x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \left(x^2 - 2x\frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ – nie jest oczywiście istotne, czy piszemy $o(x^4)$ czy też $-o(x^4)$. Ponieważ $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, więc $\operatorname{tg}^2 x = (x + o(x))^2 = = x^2 + 2xo(x) + (o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$. Przejdźmy do ostatniego etapu: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, zatem $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o((2x)^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$. Odejmując dwie ostatnie równości stronami otrzymujemy: $\cos x - \cos 2x = \left(-\frac{1}{2} + 2\right)x^2 + o(x^2) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$. Stąd zaś wynika, że $(\cos x - \cos 2x)^2 = \left(\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 = \frac{9}{4}x^4 + 3x^2 o(x^2) + (o(x^2))^2 = \frac{9}{4}x^4 + o(x^4)$. Wobec tego

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))^5}{(x^2-\sin^2 x)(\operatorname{tg}^2 x)(\cos x - \cos 2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^5}{\left(\frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)(x^2 + o(x^2))\left(\frac{9}{4}x^4 + o(x^4)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)^5}{\left(x^4\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)\right)\left(x^2\left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)\right)\left(x^4\left(\frac{9}{4} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)^5}{\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)\left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)\left(\frac{9}{4} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{3}\cdot 1 \cdot \frac{9}{4}} = -\frac{1}{24}. \ \blacksquare$$

W ten sposób łatwiej jest operować wzorem Taylora, obliczać granice itp. Jednak trzeba pamiętać o tym, że symbol o nie jest normalnym symbolem oznaczającym funkcję – to jest skrót zdania mówiącego, że iloraz dwu wielkości jest zbieżny do 0, np. z równości (prawdziwej) $x - \sin x = o(x^2)$ przy $x \longrightarrow 0$ wynika równość $x - \sin x = o(x)$ przy $x \longrightarrow 0$, ale z tej drugiej równości pierwsza nie wynika: pierwsza równość oznacza bowiem, że $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0$ i z niej wynika oczywiście, że $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x} = 0$, bo $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^2}\cdot x\right) = 0$. W przeciwną stronę wnioskować nie można. Trzeba równość $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0$ uzasadnić inaczej, można np. skorzystać z wzoru Maclaurina dla funkcji $x - \sin x$ i $n = 2$, druga pochodna tej funkcji w punkcie 0 jest równa 0, więc pierwszy wielomian Taylora w punkcie 0 pokrywa się z drugim wielomianem Taylora w punkcie 0. Ogólnie jeśli $f(x) = o(x^2)$ przy $x \longrightarrow 0$, to również $f(x) = o(x)$ przy $x \longrightarrow 0$. Na odwrót być nie musi: $\ln(1+x) - x = o(x)$, natomiast nie jest prawdą, że $\ln(1+x) - x = o(x^2)$!

Warto stosować symbol o, ale trzeba umieć się nim posługiwać, więc studentom którzy mają kłopoty z analizą matematyczną polecam go z dużymi zastrzeżeniami, ci którzy dobrze zrozumieli pojęcie granicy nie powinni mieć z nim problemów, pod warunkiem starannego prześledzenie kilku rozumowań.

16. Znajdziemy raz jeszcze granicę $\lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x}$. Mamy $(1+x)^{1/x} = e^{(1/x)\cdot\ln(1+x)} =$
$= e^{(1/x)(x - x^2/2 + o(x^2))} = e^{1 - x/2 + o(x)} = e\cdot e^{-x/2+o(x)} = e\left(1 - \frac{x}{2} + o(x) + o\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right)\right) =$
$= e\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)$. Wobec tego $\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e - e\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)}{x} =$
$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e}{2} + \frac{o(x)}{x}\right) = \frac{e}{2}$, napisaliśmy $o(x)$ zamiast $-e\cdot o(x)$, ale ta operacja jest dozwolona, bo po pomnożeniu funkcji, której granicą jest 0, przez liczbę, otrzymujemy znów funkcję, której granicą jest 0. $\blacksquare$

Zajmiemy się teraz przez chwilę wypukłością funkcji dwukrotnie różniczkowalnych. Przypomnijmy, że funkcja różniczkowalna jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niemalejąca, ściśle wypukła - wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest ściśle rosnąca. Korzystając z twierdzenia o monotoniczności funkcji różniczkowalnych stwierdzamy natychmiast prawdziwość następującego twierdzenia:

Twierdzenie o wypukłości funkcji dwukrotnie różniczkowalnych

Jeśli funkcja f jest określona na przedziale otwartym i jest dwukrotnie różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału, to jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej druga pochodna f'' przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Dwukrotnie różniczkowalna funkcja określona na przedziale otwartym jest ściśle wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej druga pochodna f'' jest nieujemna i w każdym przedziale zawartym w jej dziedzinie znajduje się co najmniej jeden punkt, w którym druga pochodna f'' jest dodatnia. ■

W istocie rzeczy badając wypukłość funkcji w poprzednim rozdziale już stosowaliśmy to twierdzenie. W niektórych przypadkach uzasadnienia wypukłości mogłyby zostać nieznacznie skrócone, gdybyśmy powoływali się wprost na twierdzenie o wypukłości funkcji dwukrotnie różniczkowalnych. Zachęcamy czytelnika do ponownego prześledzenia podanych wcześniej przykładów. Teraz natomiast sformułujemy twierdzenie, które w wielu przypadkach pozwala na łatwe znajdowanie punktów przegięcia funkcji wielokrotnie różniczkowalnej.

Twierdzenie o punktach przegięcia funkcji wielokrotnie różniczkowalnych

1. Jeśli p jest punktem przegięcia funkcji f, która jest dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie, to $f''(p) = 0$.

2. Jeśli funkcja f jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie p, $n > 2$ i $0 = f''(p) = f^{(3)}(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p)$ i $f^{(n)}(p) \neq 0$, to jeśli n jest liczbą nieparzystą, to p jest punktem przegięcia funkcji f, jeśli natomiast liczba n jest parzysta, to p nie jest punktem przegięcia funkcji f.

Dowód. 1. Z definicji punktu przegięcia wynika, że istnieje liczba $\delta > 0$, taka że na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ f jest funkcją wypukłą, a na drugim – wklęsłą. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że na przedziale $(p-\delta, p]$ funkcja f jest wypukła, a na przedziale $[p, p+\delta)$ – wklęsła. Ponieważ f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie p, więc jest różniczkowalna w punktach pewnego przedziału o środku w punkcie p. Bez straty ogólności można przyjąć, że tym przedziałem jest $(p-\delta, p+\delta)$. Wobec tego na przedziale $(p-\delta, p]$ pochodna f' funkcji f jest niemalejąca i wobec tego jej pochodna, czyli f'', jest nieujemna w każdym punkcie, w którym jest określona, w szczególności $f''(p) \geq 0$. Na przedziale $[p, p+\delta)$ funkcja f jest wklęsła i wobec tego $f''(p) \leq 0$. Ponieważ $f''(p) \leq 0 \leq f''(p)$, więc $f''(p) = 0$.

2. Zastosujemy wzór Taylora do funkcji f'' w punkcie p. Mamy $f''(p+h) = f''(p) + \dfrac{f^{(3)}(p)}{1!}h + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!}h^{n-2} + r_{n-2}(h) = h^{n-2}\left(\dfrac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \dfrac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right)$. Niech $\delta > 0$ będzie taką liczbą dodatnią, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $\left|\frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right| < \frac{|f^{(n)}(p)|}{(n-2)!}$. Liczby $\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}$ i $\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!}$ mają więc taki sam znak. Jeśli liczba n jest nieparzysta, to liczba h^{n-2} jest dodatnia dla dodatnich h i ujemna dla h ujemnych. Wobec tego liczba $f''(p+h) = h^{n-2}\left(\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right)$ jest na jednym z przedziałów $(-\delta, 0)$, $(0,\delta)$ dodatnia, a na drugim - ujemna. Wobec tego na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcja f jest ściśle wklęsła, a na drugim – ściśle wypukła. Wynika stąd, że p jest punktem przegięcia funkcji f. Jeżeli natomiast liczba n jest parzysta, to wtedy funkcja f'' ma w punkcie p lokalne ekstremum właściwe, więc albo na całym przedziale $(p-\delta, p+\delta)$ z wyjątkiem punktu p funkcja f'' jest dodatnia, albo na całym przedziale $p-\delta, p+\delta$ funkcja f'' jest ujemna. W pierwszym przypadku funkcja f jest ściśle wypukła na całym przedziale $(p-\delta, p+\delta)$, a w drugim – ściśle wklęsła. W żadnym z tych przypadków p nie jest punktem przegięcia funkcji f. Dowód został zakończony. ■

Również to twierdzenie dobrze ilustruje schemat rozumowania przedstawiany w tym rozdziale: funkcja f zachowuje się w dostatecznie małych otoczeniu punktu p tak jak funkcja $\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n$ w otoczeniu 0 (reszta jest za mała, by mieć istotny wpływ na zachowanie się funkcji!).

17. Niech $f(x) = x^2(x-6)^2$. Sporządzimy wykres funkcji f. w tym celu ustalimy, na jakich przedziałach funkcja rośnie, na jakich maleje, na jakich jest wypukła, na jakich jest wklęsła, gdzie ma lokalne ekstrema, gdzie punkty przegięcia i znajdziemy asymptoty – oczywiście część wymienionych obiektów może nie istnieć. Obliczymy pochodne: $f'(x) = 2x(x-6)(x+x-6) = 4(x^3 - 9x^2 + 18x)$, $f''(x) = 12(x^2 - 6x + 6)$ i $f^{(3)}(x) = 24(x-3)$. Pierwiastkami pierwszej pochodnej są liczby: 0, 3, 6; drugiej: $3-\sqrt{3}$ i $3+\sqrt{3}$ i wreszcie trzeciej: 3. Widać od razu, że w punktach zerowania się pierwszej pochodnej druga przyjmuje wartości różne od 0, wobec tego we wszystkich tych punktach f ma lokalne ekstrema właściwe: w 0 i w 6 – lokalne minima właściwe (bo $f''(0), f''(6) > 0$), a w 3 – lokalne maksimum właściwe (bo $f''(3) = -3 < 0$). Ponieważ na przedziałach $(-\infty, 0]$, $[0,3]$, $[3,6]$ i $[6,\infty)$ funkcja f jest ściśle monotoniczna, bo w ich punktach wewnętrznych pierwsza pochodna jest różna od 0, więc na przedziałach $(-\infty, 0]$ i $[3,6]$ funkcja f maleje, a na przedziałach $[0,3]$ i $[6,\infty)$ – rośnie. Podkreślmy, że choć to bardzo łatwe, to jednak nie badaliśmy znaku pierwszej pochodnej, bo układ lokalnych ekstremów wymusza stwierdzenia na temat wzrostu i spadku wartości funkcji. Oczywiście w ostatecznym rozrachunku wiemy, jaki jest ten znak (pochodna jest różna od 0 w punktach przedziału $(-\infty, 0)$, funkcja maleje na tym przedziale, więc pochodna musi być ujemna, ale ten wniosek wyciągnęliśmy stosując ogólne twierdzenia o zachowaniu się funkcji). Oczywiście z definicji funkcji wynika natychmiast, bez oblicznia pochodnych, że wszystkie jej wartości są nieujemne, więc $0 = f(0) = f(6)$ jest nie tylko lokalnie najmniejszą wartością funkcji, ale również najmniejszą ze wszystkich w ogóle. Inaczej jest z liczbą $81 = f(3)$. W tym przypadku mamy do czynienia z minimum lokalnym: w $f(9) = 81 \cdot 9 > 81$, zatem 81 nie jest największą wartością funkcji, jest nią jeśli ograniczymy dziedzinę do dostatecznie krótkiego przedziału zawierającego 3, zachęcamy do sprawdzenia, że największym przedziałem, na którym funkcja f przyjmuje swą największą wartość w punkcie 3 i w żadnym innym jest $(3-3\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2})$. Ponieważ w punktach zerowania się drugiej pochodnej trzecia przyjmuje wartości różne od 0, więc punkty $3-\sqrt{3}$ oraz $3+\sqrt{3}$ są punktami przegięcia funkcji f. Oczywiście pierwszy z nich znajduje się między 0 i 3, a drugi między 3 i 6. Na półprostej $(-\infty, 3-\sqrt{3}]$ funkcja f jest ściśle wypukła, na przedziale $[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}]$ – ściśle wklęsła, a na półprostej $[3+\sqrt{3}, +\infty)$ znów ściśle wypukła. jasne jest, że funkcja nie ma asymptot pionowych (jest ciągła w każdym punkcie prostej). Nie ma też ani poziomych ani ukośnych, bo $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(x^2(x-6)^2-ax-b\big)=+\infty$ niezależnie od wyboru liczb a i b. Zakończyliśmy badanie funkcji i jesteśmy już w stanie narysować jej wykres.

18. Teraz zbadamy funkcję $\sqrt{1-e^{-x^2}}$. Wzór ten określa ją na całej prostej, więc jest ona ciągła. Jest też różniczkowalna we wszystkich punktach $x\neq 0$, bo dla takich punktów zachodzi nierówność $1-e^{-x^2}>0$, a na półprostej $(0,+\infty)$ funkcja pierwiastek kwadratowy jest różniczkowalna. Pierwsza pochodna jest równa $\dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$. Jasne jest, że ten wzór nie działa w przypadku $x=0$. Spróbujmy obliczyć pochodną w punkcie 0 korzystając bezpośrednio z jej definicji. Mamy $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}=1$, bo pierwiastek kwadratowy jest funkcją ciągłą (przedostatnia równość) oraz $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (ostatnia równość). W taki sam sposób stwierdzamy, że $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)-f(0)x=-1$. Oznacza to, że funkcja nie ma pochodnej w punkcie 0, bowiem jednostronne pochodne są różne. Oznacza to, że w punkcie 0 wykres „załamuje się”, lub też: „ma ostrze”. Znajdziemy drugą pochodną: $f''(x)=\left(\dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}\right)'=\left(xe^{-x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-1/2}\right)'=$

$$=e^{-x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-1/2}-2x^2e^{-x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-1/2}-x^2e^{-2x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-3/2}=$$

$$=e^{-2x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-3/2}\left(e^{x^2}\left(1-2x^2\right)-1+x^2\right).$$

Wykażemy, że dla każdego $x\neq 0$ zachodzi nierówność $f''(x)<0$. Wystarczy wykazać, że jeśli $y>0$, to $e^y(1-2y)-1+y<0$, piszemy y zamiast x^2. Mamy $(e^y(1-2y)-1+y)'=$ $=e^y(1-2y)-2e^y+1=-2ye^y-e^y+1<0$ dla $y>0$, bo $-e^y+1<0$ w przypadku $y>0$. Ponieważ pochodna funkcji $e^y(1-2y)-1+y$ jest ujemna na półprostej $(0,+\infty)$, więc funkcja ta jest malejąca na półprostej $[0,\infty)$, a ponieważ jej wartością w punkcie 0 jest 0, więc jej wartości w punktach dodatnich są ujemne.* Z tego, że druga pochodna jest ujemna na każdej z półprostych $(-\infty,0)$

* Można udowodnić, że $e^y(1-2y)-1+y<0$ dla $y>0$ innymi metodami. Np. można wykorzystać wzór $e^y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^n}{n!}$ – otrzymamy po prostych rachunkach szereg, którego wszystkie

oraz $(0,+\infty)$ wynika, że na każdej z półprostych $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$ funkcja f jest ściśle wklęsła. Nie jest jednak ona ściśle wklęsła na całej prostej, choć jest ciągła w punkcie 0! Jeśli $\delta>0$, to odcinek łączący punkty $\left(-\delta,\sqrt{1-e^{-\delta^2}}\right)$ i $\left(\delta,\sqrt{1-e^{-\delta^2}}\right)$ leży *nad* wykresem (z wyjątkiem końców) funkcji f zamiast pod wykresem. Musiałoby być odwrotnie, gdyby funkcja była ściśle wklęsła lub wklęsła na całej prostej lub choćby na przedziale $[-\delta,\delta]$.

19. Naszkicujemy teraz wykres funkcji f zdefiniowanej wzorem $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{7x^2-3}{9x^2-4}}$ zdefiniowanej dla $x\neq\pm\frac{2}{3}$. Zadanie to mieli rozwiązać studenci zaoczni we wrześniu 1996. Poza definicją funkcji podane były wzory na pierwszą i drugą pochodną tej funkcji:

$$f'(x)=-0{,}4x\left(9x^2-4\right)^{-6/5}\left(7x^2-3\right)^{-4/5},$$

$$f''(x)=0{,}24(315x^4-91x^2-20)\left(9x^2-4\right)^{-11/5}\left(7x^2-3\right)^{-9/5}$$

Studenci zostali poinformowani, że druga pochodna przyjmuje wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\pm\sqrt{\dfrac{91+\sqrt{33481}}{630}}\approx 0{,}659458$. Jasne jest, że f jest funkcją parzystą, tzn. $f(-x)=f(x)$ dla każdej liczby x z dziedziny funkcji f. Wobec tego jej wykres jest symetryczny względem pionowej osi układu współrzędnych. Wystarczy więc badać f na jednej z półprostych $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ oraz na jednym z przedziałów $\left(-\frac{2}{3},0\right]$, $\left[0,\frac{2}{3}\right)$. Trzeba więc ustalić na jakich przedziałach funkcja f rośnie, na jakich przedziałach maleje, na jakich przedziałach jest wypukła, a na jakich – wklęsła. Wyjaśnić, w jakich punktach dziedziny funkcja ma pochodną, a w jakich jej nie ma oraz obliczyć granice funkcji f, f', f'' w końcach przedziałów składających się na ich dziedziny. Również ustalić, gdzie są lokalne ekstrema i punkty przegięcia. Z wzoru na pierwszą pochodną wynika, że jest ona określona dla $x\neq\pm\frac{2}{3},\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$, przy czym nieistnienie pochodnej w punktach $\pm\frac{2}{3}$ wynika z tego, że te punkty są poza dziedziną funkcji f i już to wystarcza, by nie miało sensu różniczkowanie funkcji w tych punktach. W punktach $\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ funkcja jest określona, więc teoretycznie nie ma przeszkód dla istnienia pochodnej, jednak wzór nie działa, bo nie można podnieść liczby 0 do potęgi o *wykładniku ujemnym*. Z wzoru na pochodną wynika jednak od razu, że $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3/7}}f'(x)=+\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to\sqrt{3/7}}f'(x)=-\infty$. Stąd, z definicji pochodnej i twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że $f'(\pm\sqrt{3/7})=\mp\infty$. Znaczy to, że funkcja f *nie* jest w

---

wyrazy w przypadku $y>0$ są ujemne. Inna metoda to stwierdzenie, że w przypadku $y<1$ zachodzi nierówność $e^y<\dfrac{1}{1-y}$, zatem dla wszystkich $y\in\mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^y(1-y)<1$, wobec tego $e^y(1-2y)-1+y=e^y(1-y)-y(e^y-1)-1<-y(e^y-1)<0$ dla $y\neq0$.

tych punktach różniczkowalna, bo choć pochodna istnieje, to jest nieskończona. W szczególności w tych punktach wykres ma styczną, tyle że – pionową. Funkcja f jest więc ściśle rosnąca na półprostej $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ oraz na przedziale $\left(-\frac{2}{3},0\right]$. Na przedziale $\left[0,\frac{2}{3}\right)$ oraz na półprostej $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ funkcja f jest ściśle malejąca. Podkreślmy: funkcja rośnie na każdym z dwóch przedziałów, ale nie na ich sumie o czym przekonamy się za chwilę. Zacznijmy od oczywistego stwierdzenia: $\dfrac{3}{7}<\dfrac{4}{9}$. Wobec tego funkcja f przyjmuje wartości dodatnie na półprostej $(-\infty,-\frac{2}{3})$ oraz na przedziale $(-\sqrt{\frac{3}{7}},0)$. Mamy $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{\dfrac{7x^2-3}{9x^2-4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{\dfrac{7-3/x^2}{9-4/x^2}}=\sqrt[5]{\dfrac{7}{9}}$. Dalej $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^-}f(x)=+\infty$, bo $f(x)>0$ na półprostej $(-\infty,-\frac{2}{3})$ i licznik dąży do liczby różnej od 0, zaś mianownik do 0. Następnie $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+}f(x)=-\infty$, bo tym razem funkcja jest ujemna, a licznik dąży do liczby różnej od 0, podczas gdy mianownik – do 0. Zajmiemy się teraz wypukłością funkcji f. W tym celu ustalimy, gdzie jej druga pochodna f'' jest dodatnia, gdzie – ujemna. We wzorze na f'' wyrażenia $7x^2-3$ oraz $9x^2-4$ podnoszone są do nieparzystych potęg, następnie z otrzymanych wyników wyciągany jest pierwiastek stopnia nieparzystego. Wynika stąd od razu, że na każdym z kolejnych przedziałów $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{3},-\sqrt{\dfrac{91+\sqrt{33481}}{630}}\right)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{91+\sqrt{33481}}{630}},-\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right)$ i $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{7}},0\right)$ pochodna f'' ma inny znak: na pierwszym z wymienionych przedziałów jest dodatnia, na drugim – ujemna, na trzecim – dodatnia i wreszcie na czwartym ujemna. Wynika stąd, że na półprostej $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$ i na przedziale $\left[-\sqrt{\dfrac{91+\sqrt{33481}}{630}},-\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right]$ funkcja f jest wypukła, a na każdym z przedziałów $\left(-\dfrac{2}{3},-\sqrt{\dfrac{91+\sqrt{33481}}{630}}\right]$ i $\left[-\sqrt{\dfrac{3}{7}},0\right]$ – wklęsła. Wobec tego punkty $-\sqrt{\dfrac{91+\sqrt{33481}}{630}}$ i $-\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ są punktami przegięcia funkcji f, $-\dfrac{2}{3}$ punktem przegięcia nie jest, bo leży poza dziedziną funkcji f (ponieważ nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}}f(x)$, więc nie można sensownie dookreślić funkcji w tym punkcie!). Innych punktów przegięcia nie ma: jedynym punktem, który jeszcze nie został zbadany jest 0 – można by pomyśleć, że z wklęsłości funkcji f na przedziale $\left[-\sqrt{\frac{3}{7}},0\right]$ oraz z parzystości wynika wklęsłość funkcji na przedziale $\left[-\sqrt{\frac{3}{7}},\sqrt{\frac{3}{7}}\right]$, tak jest, ale trzeba się jeszcze wyraźnie powołać na różniczkowalność funkcji f w punkcie 0 (por. przykład poprzedni, czyli 18.), jednak takiego twierdzenie nie udowodniliśmy i prościej jest skorzystać z tego, że na przedziale otwartym $\left(-\sqrt{\frac{3}{7}},\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ druga pochodna f'' funkcji f jest ujemna. Z tego, co do tej pory udało się nam ustalić, wynika, że prosta pozioma $y=\sqrt[5]{\dfrac{7}{9}}$ jest asymptotą poziomą funkcji f przy $x\longrightarrow\pm\infty$, zaś proste pionowe $x=\pm\dfrac{2}{3}$ są obustronnymi asymptotami pionowymi funkcji f przy $x\longrightarrow\pm\dfrac{2}{3}$.

Uwaga: w istocie rzeczy nie trzeba w tym zadaniu wykonywać żadnych obliczeń świadczących o tym, że $\frac{2}{3} > \sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}} > \sqrt{\frac{3}{7}}$ *– ta nierówność wynika z tego, że* $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+} f'(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to-\sqrt{\frac{3}{7}}^+} f'(x) = +\infty$*, więc na przedziale* $\left(-\frac{2}{3}, -\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ *pochodna* f' *musi najpierw maleć, a potem rosnąć, co oznacza, że druga pochodna musi przynajmniej w jednym punkcie tego przedziału przyjąć wartość 0, jedynym kandydatem jest punkt* $-\sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}}$*. Zachodzi przybliżona równość* $\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0{,}654653$*, więc różnica między punktami* $\sqrt{\frac{3}{7}}$ *i* $\sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}}$ *jest mniejsza niż* $0{,}01$*, zatem może być przeoczona przez program komputerowy rysujący wykresy funkcji (jeśli nie zażądamy odpowiedniej dokładności w tej okolicy!)* . $f(0{,}67) \approx 1{,}288$, $f(0{,}66) = -0{,}908$, więc w tym przypadku zmiana wartości argumentu o $0{,}01$ powoduje zmianę wartości funkcji o około $2{,}196$, więc ponad 200 razy większą niż zmiana argumentu. Rysując wykres na papierze, przyjmując np. że jednostka to 1 cm musimy zwracać uwagę na przedziały długości 0,1 mm, co jest mało realne ze względu na grubość ołówka, linie na rysunku komputerowym też muszą mieć jakąś grubość, więc jedyna rada, to obserwować okolice punktów przegięcia w dużym powiększeniu i zastosowaniu odcinków jednostkowych o różnych długościach na osiach: na osi argumentów odcinek jednostkowy może być np. około 200 razy dłuższy niż odcinek jednostkowy na osi wartości funkcji. ■

W ostatnio prezentowanych przykładach widać było, że w licznych przypadkach można omijać różne obliczenia stosując odpowiednie twierdzenia o charakterze ogólnym. Dużą rolę w tych rozumowaniach odgrywa wzór Taylora. Nasuwa się naturalne pytanie: czy nie można powiedzieć czegoś więcej o reszcie r_n przynajmniej w sytuacji, z którą często mamy do czynienia, mianowicie w przypadku funkcji, która ma więcej pochodnych w otoczeniu punktu p niż n. Okazuje się, że coś powiedzieć można, ale jednak niezbyt dużo. Podamy przykład twierdzenia tego typu, jest ich oczywiście więcej. Stwierdzić jednak wypada, że pożytek z nich na ogół nie jest zbyt wielki, zasadniczo rzecz biorąc twierdzenie Peano to wszystko, co w przypadku ogólnym powiedzieć można.

Twierdzenie Lagrange'a o reszcie we wzorze Taylora

Niech f będzie funkcją, która ma pochodną rzędu $n+1$ w każdym punkcie pewnego przedziału otwartego zawierającego p. Wtedy dla każdego punktu x z tego przedziału istnieje punkt y_x leżący między punktami x i p, dla którego zachodzi równość $r_n(x-p) = \frac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$.

Dowód. Niech
$$h(t) = \left(f(x) - f(p) - \frac{f'(p)}{1!}(x-p) - \cdots - \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right)(x-t)^{n+1} -$$
$$-(x-p)^{n+1}\left(f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right).$$
Mamy $h(x) = 0 = h(p)$. Ponieważ funkcja f ma w przedziale o końcach x, p $n+1$–ą pochodną, więc funkcja h jest różniczkowalna na tym przedziale, a ponieważ przyjmuje równe wartości w jego

końcach, więc w pewnym punkcie wewnętrznym y_x tego przedziału zachodzi równość $h'(y_x)=0$. Mamy wzór: $h'(t) = -(n+1)(x-t)^n\left(f(x)-f(p)-\frac{f'(p)}{1!}(x-p)-\cdots-\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right)+$ $+(x-p)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$. Z tego wzoru wynika od razu, że dla $t=y_x$ zachodzi równość:

$$f(x)=f(p)+\frac{f'(p)}{1!}(x-p)+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n+\frac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1},$$

czyli właśnie ta, którą chcieliśmy otrzymać. ■

Podkreślmy raz jeszcze: pozornie dzięki temu wzorowi wiemy coś więcej o reszcie. Kłopot polega jednak na tym, że o punkcie y_x występujacym we wzorze Lagrange'a nie wiemy nic, oprócz tego, że leży między p i x. To bardzo ogranicza możliwość wyciągania wniosków idących dalej niż te, które wynikają z wzoru Peano. Oczywiście czasem jest to możliwe. Jeśli np. $f(x)=\sin x$, to dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ mamy $|f^{(n+1)}(x)|\leq 1$, bowiem z dokładnością do znaku pochodna dowolnego rzędu to sinus lub kosinus. Stąd w szczególności wynika, że w przypadku funkcji sinus zachodzi nierówność $|r_n(h)|\leq\frac{1}{(n+1)!}|h|^{n+1}$. Otrzymaliśmy więc konkretne oszacowanie, jakiego z pewnością nie da się uzyskać z wzoru Peano. Przeczy to ostrzeżeniom wypowiadanym przed chwilą, ale tylko pozornie. W tym konkretnym przypadku istotą była dodatkowa wiedza o pochodnych dowolnego rzędu badanej funkcji i to ona w połączeniu z wzorem Lagrange'a pozwoliła na wyciągnięcie dalej idących wniosków.

20. Zdefiniujmy funkcję f wzorami

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}, & \text{if } x>0;\\ 0, & \text{if } x\leq 0.\end{cases}$$

Jest jasne, że w każdym punkcie, być może z wyjątkiem punktu 0, funkcja ta ma pochodne wszystkich rzędów, czyli jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy. W punkcie 0 sytuacja nie jest już jasna, bo z prawej jego strony funkcja jest zdefiniowana inaczej niż z lewej, co mogłoby powodować kłopoty z ciągłością lub różniczkowalnością. Wykażemy poniżej, że w rzeczywistości funkcja f również w punkcie 0 jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy oraz że $f^{(n)}(0)=0$ dla każdej liczby naturalnej n. Wyniknie stąd, że wielomiany Maclaurina tej funkcji są funkcjami zerowymi, a więc dla każdego naturalnego n zachodzi równość $f(x)=r_n(x)$, oczywiście chodzi tu o resztę we wzorze Maclaurina, czyli $r_n(x)=f(x)-f(0)-\frac{f'(0)}{1!}x-\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Oznacza to, że w tym konkretnym przypadku pomijanie reszty może być pozbawione sensu, bo w niej są zawarte wszystkie informacje o funkcji f! Przykład ten omawiamy po to tylko, by przestrzec czytelników, że każda metoda ma swoje ograniczenia, że stosując twierdzenia poprawnie, tj. wtedy, gdy ich założenia są spełnione możemy dochodzić do dziwnych wniosków lub ma wniosków mało interesujących. Po tych pesymistycznych uwagach zajmiemy się wykazaniem równości $f^{(n)}(0)=0$.

Dla $n=0$ równość ta jest bezpośrednim wnioskiem z określenia funkcji f w punkcie 0: $f^{(0)}(0)=f(0)=0$. Jest też jasne, że $\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$ – dla $x<0$ jest $f(x)=0$. Mamy też

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0$. Wykazaliśmy, że funkcja f jest ciągła w punkcie 0. Zauważmy teraz, że dla dowolnego $x < 0$ i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $f^{(n)}(x) = 0$, pochodna funkcji stałej jest równa 0, wartość pochodnej w punkcie zależy jedynie od zachowania się funkcji w otoczeniu tego punktu, w naszym przypadku rozpatrujemy chwilowo funkcję f na półprostej $(-\infty, 0)$.Teraz przeniesiemy się na półprostą $(0, \infty)$. W tym przypadku mamy $f(x) = e^{-1/x}$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$, $f''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x}$, $f^{(3)}(x) = \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x}$, ... Jasne jest, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian w_n stopnia $2n$, taki że $f^{(n)}(x) = w_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$, np. $w_1(y) = y^2$, $w_2(y) = y^4 - 2y^3$, $w_3(y) = y^6 - 6y^5 + 6y^4$. Stąd od razu wynika, że $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{y \to \infty} \frac{w_n(y)}{e^y} = 0$. Z definicji pochodnej i twierdzenia o wartości średniej wynika więc od razu, że $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} f'(c_x) = 0$, gdzie c_x jest punktem leżącym między 0 oraz x, w szczególności $|c_x| < |x|$. Analogicznie korzystając z już otrzymanego wyniku wnioskujemy, że $f''(0) = 0$ itd. Dowód został zakończony. ■

Uwaga. Funkcja opisana w przykładzie 20 może wydawać się nieco dziwna. Warto zaznaczyć, że takie zachowania się funkcji nie są możliwe w przypadku tzw. funkcji analitycznych, tj. takich funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych , które w pewnym otoczeniu dowolnie wybranego punktu dziedziny są równe sumie swego szeregu Taylora. W takim przypadku zerowanie się wszystkich pochodnych w pewnym punkcie powoduje, że funkcja jest stała w otoczeniu tego punktu, co jak widać z poprzedniego przykładu nie musi mieć miejsca w przypadku funkcji różniczkowalnej nieskończenie wiele razy. Istnienie takich funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zauważone zostało nie od razu, stały się one istotnym narzędziem współczesnej matematyki. ■

Na tym kończymy przegląd zagadnień związanych z wielokrotnym różniczkowaniem funkcji.

Informacja: wzór z resztą ogólniejszej postaci (Schlö milcha–Rocha) znajduje się w książce G.M.Fichtenholza, „Rachunek różniczkowy i całkowy", tom 1.

Zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych, stopnia nie mniejszego od 1, ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Dowód. Niech $w(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, przy czym $n \geq 1$ i $a_n \neq 0$. Istnieje liczba $r > 0$, taka że jeśli $|z| \geq r$, to $|w(z)| > |a_0| = |w(0)|$, np. $r = 2 + \frac{2|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$. Jeśli bowiem $|z| \geq r$, to $|z| \geq 2 > 1$ i wobec tego

$$|w(z)| = |a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n| \geq |a_n z^n| - |a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}| \geq$$
$$\geq |a_n||z|^n - \big(|a_0| + |a_1||z| + \cdots + |a_{n-1}||z|^{n-1}|\big) \geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\big(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}||\big) =$$
$$= |z|^{n-1}\Big(|a_n||z| - \big(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\Big) >$$

$> \Big((2|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{n-1}|)-(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|)\Big)=|a_0|$. Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że z ciągu liczb zespolonych (z_n) o module $\le r$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnej granicy g i wtedy oczywiście $|g|\le r$. Stąd wynika od razu, że istnieje $|z_0|$, takie że $|z_0|\le r$, $|z|\le r \Rightarrow |w(z_0)|\le |w(z)|$, czyli $|w(z_0)|$ jest najmniejszą wartością funkcji $|w|$ na kole o promieniu r i środku w punkcie 0. W szczególności $|w(z_0)|\le |w(0)|=|a_0|$ i wobec tego również dla $|z|\ge r$ zachodzi nierówność $|w(z)|\ge |a_0|\ge |w(z_0)|$. Oznacza to, że $|w(z_0)|$ jest najmniejszą wartością funkcji $|w|$ na *całej* płaszczyźnie. Wykażemy, że $w(z_0)=0$. Przyjmijmy, że $z=z_0+h$. Wtedy możemy napisać $w(z)=w(z_0+h)=b_0+b_1h+b_2h^2+\cdots+b_nh^n$, gdzie $b_0=a_0+a_1z_0+\cdots+a_nz_0^n=w(z_0)$, $b_1=a_1+2a_2z_0+\cdots+na_nz_0^{n-1}=w'(z_0)$, $\ldots$, $b_n=a_n=\frac{1}{n!}w^{(n)}(z_0)$. Z założenia, że stopień wielomianu równy jest n wynika, że $0\neq a_n=b_n$. Niech m będzie najmniejszą liczbą ≥ 1 taką, że $b_m\neq 0$. Załóżmy, że $w(z_0)\neq 0$. Wtedy można napisać $w(z_0)=b_0=|b_0|\cdot e^{i\varphi}$ dla pewnego $\varphi\in\mathbb{R}$. Mamy dalej $|w(z)|=|b_0+b_mh^m+b_{m+1}h^{m+1}+\cdots+b_nh^n|$. Niech $\varrho<1$ będzie liczbą dodatnią mniejszą niż $\frac12|b_0|$ i niech $h=\varrho\cdot e^{i\frac{\varphi+\pi}{m}}$. Wtedy $\big|b_0+b_mh^m\big|=\big||b_0|\cdot e^{i\varphi}+\varrho^m e^{i(\varphi+\pi)}\big|=\big||b_0|e^{i\varphi}-\varrho^m e^{i\varphi}\big|=\big||b_0|-\varrho^m\big|\big|e^{i\varphi}\big|=|b_0|-\varrho^m$. Załóżmy dodatkowo, że $\varrho\big(|b_{m+1}|+|b_{m+2}|+\cdots+|b_n|\big)<\frac12$. Mamy wtedy

$$|w(z)|=\big|b_0+b_mh^m+b_{m+1}h^{m+1}+\cdots+b_nh^n\big|\le\big|b_0+b_mh^m\big|+\big|b_{m+1}h^{m+1}+\cdots+b_nh^n\big|=$$
$$=|b_0|-\varrho^m-\big|b_{m+1}h^{m+1}+\cdots+b_nh^n\big|\le|b_0|-\varrho^m-\big(|b_{m+1}||h|^{m+1}+\cdots+|b_n||h|^n\big)\le$$
$$\le|b_0|-\varrho^m+|h|^{m+1}\big(|b_{m+1}|+\cdots+|b_n|\big)=|b_0|-\varrho^m+\varrho^{m+1}\big(|b_{m+1}|+\cdots+|b_n|\big)\le|b_0|-\varrho^m+\tfrac12\varrho^m=$$
$$=|b_0|-\tfrac12\varrho^m<|b_0|.$$

Okazało się, że wbrew założeniu $|w(z_0)|$ *nie* jest najmniejszą wartością funkcji $|w|$. To kończy dowód tego, że $w(z_0)=0$. Twierdzenie zostało więc wykazane. ∎

Wniosek z zasadniczego twierdzenia algebry

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych, którego stopień nie jest mniejszy od 1, może być przedstawiony w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych stopnia pierwszego i drugiego.

Dowód. Jeśli współczynniki wielomianu w są liczbami rzeczywistymi, to $\overline{w(z)}=w(\overline{z})$ – prosty dowód tej równości wykorzystujący jedynie najprostsze własności sprzężenia czytelnik przeprowadzi samodzielnie. Z tej równości wynika, że jeśli liczba zespolona z_0 jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to również liczba zespolona $\overline{z_0}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu. Wobec tego jeśli $z_0\notin\mathbb{R}$, to wielomian w jest podzielny przez wielomian $(z-z_0)(z-\overline{z_0})=z^2-(z_0+\overline{z_0})z+|z_0|^2$. Współczynniki tego wielomianu są liczbami rzeczywistymi, więc w ten sposób sprowadzamy problem do wielomianu stopnia o 2 mniejszego od w. Jeśli z_0 jest liczbą rzeczywistą, to wielomian w jest podzielny przez wielomian $z-z_0$, więc w tym przypadku redukujemy problem do wielomianu stopnia o 1 mniejszego od w. W obu przypadkach zmniejszamy stopnień interesującego nas wielomianu. Gdyby dowodzone twierdzenie nie było prawdziwe moglibyśmy założyć, że w jest wielomianem *najmniejszego* stopnia, dla którego nie zachodzi teza. Po podzieleniu go przez wielomian stopnia 1 lub otrzymujemy wielomian stopnia mniejszego, więc rozkładalny, a to dowodzi, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych może być przedstawiony w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego i drugiego o współczynnikach rzeczywistych. ■