Pamiętnik z wykładu z AM1, część trzecia

Mnożenie szeregów, szereg dwumianowy, rozwinięcie logarytmu w szereg

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdej liczby zespolonej z, jeśli bowiem $|z|<1$, to zachodzi wzór $\left|\frac{\binom{a}{n+1}z^{n+1}}{\binom{a}{n}z^n}\right| = \left|\frac{a-n}{n+1}\cdot z\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z|<1$. Niech $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n$, z jest teraz ustaloną liczbą zespoloną, której wartość bezwzględna jest *mniejsza* niż 1. Z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów wynika, że prawdziwy jest wzór $f(a)f(b) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}z^n = f(a+b)$, bowiem $\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$, wynika to z tego, że jest tak, gdy a i b są liczbami naturalnymi większymi od n ($(1+x)^a(1+x)^b=(1+x)^{a+b}$, podnosimy do potęg wykorzystując dwumian Newtona, wyrażenia po lewej stronie wymnażamy i porównujemy współczynniki po obu stronach przy x^n), następnie traktujemy obie strony tej równości jako wielomiany zmiennej a, stopnia $\leq n$, ich wartości pokrywają się w nieskończenie wielu punktach, zatem te wielomiany są równe, przy dowolnym a o ile b jest liczbą naturalną $>n$, ostatni krok to potraktowanie obu stron jako wielomianów tym razem zmiennej b przy dowolnie ustalonym a, znów obie strony są wielomianami stopnia $\leq n$, których wartości pokrywają się w nieskończenie wielu punktach ($b>n$, naturalne) i wobec tego pokrywają się zawsze.* Zajmiemy się teraz obliczeniem granicy $\lim_{a\to 0}\frac{f(a)-1}{a}$.

Jeśli $a\neq 0$, to $\frac{f(a)-1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(1-a\Big)\Big(1-\frac{a}{2}\Big)\dots\Big(1-\frac{a}{n}\Big)\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$.

Na tzw. „chłopski rozum” granica $\lim_{a\to 0}\frac{f(a)-1}{a}$ powinna więc być równa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} := L(z)$, autor przypuszcza, że w niektórych wsiach niektórzy chłopi (rolnicy) mogą nie mieć poglądu w tej kwestii, np. z braku zainteresowania nią. Wykażemy, że hipotetyczna równość rzeczywiście ma miejsce. Mamy (dzięki temu, że $\frac{1}{m+1}\leq \ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\leq\frac{1}{m}$):

$$\left|\Big(1-a\Big)\Big(1-\frac{a}{2}\Big)\dots\Big(1-\frac{a}{n}\Big)\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\right| \leq \Big(1+|a|\Big)\Big(1+\frac{|a|}{2}\Big)\dots\Big(1+\frac{|a|}{n}\Big)\frac{|z|^{n+1}}{n+1} \leq e^{|a|(1+\frac12+\frac13+\dots+\frac1n)}\frac{|z|^{n+1}}{n+1}\leq$$
$$\leq e^{|a|\left(1+\ln\frac21+\ln\frac32+\dots+\ln\frac{n}{n-1}\right)}\frac{|z|^{n+1}}{n+1} = e^{|a|(1+\ln n)}\frac{|z|^{n+1}}{n+1} = e^{|a|}n^{|a|}\frac{|z|^{n+1}}{n+1}.$$

Jeśli $|a|<\frac12$, to $e^{|a|}n^{|a|}<2\sqrt{n}$. Stąd wynika bez trudu, że jeżeli $\varepsilon>0$, to istnieje liczba naturalna k taka, że dla każdego $|a|<\frac12$ zachodzi nierówność (przypominamy, że z nie zmienia się!):

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\Big(1-a\Big)\Big(1-\frac{a}{2}\Big)\dots\Big(1-\frac{a}{n}\Big)\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}|z|^{n+1}}{n+1} \leq 2\sum_{n=k+1}^{\infty}|z|^{n+1} = \frac{|z|^{k+1}}{1-|z|} < \varepsilon.$$

Stąd wynika, że

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\Big(1-a\Big)\Big(1-\frac{a}{2}\Big)\dots\Big(1-\frac{a}{n}\Big)\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\right| <$$
$$< 2\varepsilon + \left|\sum_{n=0}^{k}\left(\Big(1-a\Big)\Big(1-\frac{a}{2}\Big)\dots\Big(1-\frac{a}{n}\Big)\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\right)\right| < 3\varepsilon,$$

jeśli $|a|<\delta$ przy czym liczba $\delta>0$ jest dostatecznie mała, a to oznacza, że $\lim_{a\to 0}\frac{f(a)-1}{a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = L(z)$.

Niech $g(a)=f(a/L(z))$. Z własności funkcji f wynika bezpośrednio, że $g(a)g(b)=g(a+b)$ oraz $\lim_{a\to 0}\frac{g(a)-1}{a}=1$, a

* Można to też wykazać bezpośrednio, np. indukcyjnie, do czego zachęcam tych, którzy zbyt wprawni w rachunkach nie są i na dokładkę nie dowierzają abstrakcyjnym rozumowaniom, jednak do tych rozumowań trzeba się powoli przyzwyczajać, bo bez nich trudno zrozumieć matematykę.

to oznacza, że $g(a)=\exp(a)=e^a$ dla każdej liczby zespolonej a. Stąd wnioskujemy, że $f(a)=g\left(\frac{aL(z)}{L(z)}\right)=e^{aL(z)}$. Dla $a=1$ mamy $e^{L(z)}=f(1)=1+z$, zatem $L(z)=\ln(1+z)$. Jeśli liczba z jest rzeczywista, to mamy do czynienia z logarytmem dobrze znanym, rzeczywistym. Jeśli natomiast liczba z rzeczywista nie jest, to wtedy jest to jedna z nieskończenie wielu możliwych wartości logarytmu zespolonego. Otrzymaliśmy więc wzór

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n=f(a)=e^{aL(z)}=e^{a\ln(1+z)}=(1+z)^a .$$

Niech $a_0+a_1+a_2+\cdots$ oraz $b_0+b_1+b_2+\cdots$ będą szeregami zbieżnymi. Niech $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$. Oznaczmy sumy częściowe częściowe tych szeregów przez : $A_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$, $B_n=b_0+b_1+\cdots+b_n$ oraz $C_n=c_0+c_1+\cdots+c_n$. Ciąg (C_n) nie musi mieć granicy, ma ją jeśli np. co najmniej jeden z szeregów $\sum a_n$, $\sum b_n$ jest zbieżny bezwzględnie. Jednak zawsze zachodzi

Twierdzenie Cesàro.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(C_0+C_1+\cdots+C_n\right)=\lim_{n\to\infty}A_n\cdot\lim_{n\to\infty}B_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n .$$

Dowód. Mamy
$$\begin{aligned}C_n&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots a_nb_0)=\\&=a_0\left(b_0+b_1+\cdots+b_n\right)+a_1\left(b_0+b_1+\cdots+b_{n-1}\right)+\cdots+a_{n-1}\left(b_0+b_1\right)+a_nb_0=\\&=a_0B_n+a_1B_{n-1}+\cdots+a_{n-1}B_1+a_nB_0\end{aligned}$$

i wobec tego

$$\begin{aligned}&C_0+C_1+\cdots+C_n=a_0B_0+(a_0B_1+a_1B_0)+(a_0B_2+a_1B_1+a_2B_0)+\cdots+(a_0B_n+a_1B_{n-1}+\cdots+a_{n-1}B_1+a_nB_0)=\\&=B_0\left(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n\right)+B_1\left(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n\right)+\cdots+B_na_0=B_0A_n+B_1A_{n-1}+B_2A_{n-2}+\cdots+B_nA_0 .\end{aligned}$$

Niech $\varepsilon>0$. Niech $A=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $B=\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ i niech $M>0$ będzie taką liczbą, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $|a_0+a_1+\cdots+a_n|\le M$, $|b_0+b_1+\cdots+b_n|\le M$. Niech n_ε będzie taką liczbą naturalną, że dla $n\ge n_\varepsilon$ zachodzą nierówności $|A_n-A|<\frac{\varepsilon}{4M}$ i $|B_n-B|<\frac{\varepsilon}{4M}$. Niech wreszcie $m_\varepsilon>n_\varepsilon$ będzie liczbą naturalną tak dużą, że dla $n\ge m_\varepsilon$ zachodzi nierówność $\frac{8M^2n_\varepsilon}{\varepsilon}-1<n$, czyli $\frac{2M^2n_\varepsilon}{n+1}<\frac{\varepsilon}{4}$. Wtedy dla dowolnych numerów i,j zachodzą nierówności $|A_iB_j-AB|\le|A_i|\cdot|B_j|+|A|\cdot|B|\le 2M^2$, jeśli zaś $i\ge m_\varepsilon$ oraz $j\ge m_\varepsilon$, to $|A_iB_j-AB|\le|A_i-A|\cdot|B_j|+|A|\cdot|B_j-B|<\frac{\varepsilon}{4M}\cdot M+M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\frac{\varepsilon}{2}$. Stąd zaś wynika, że

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{n+1}\left(A_0B_n+A_1B_{n-1}+\cdots+A_{n-1}B_1+A_nB_0\right)-AB\right|\le\\&\quad\le\frac{1}{n+1}\left(|A_0B_n-AB|+|A_1B_{n-1}-AB|+\cdots+|A_{n-1}B_1-AB|+|A_nB_0-AB|\right)\le\\&\qquad\le\frac{1}{n+1}\left(|A_0B_n-AB|+|A_1B_{n-1}-AB|+\cdots+|A_{n_\varepsilon-1}B_{n-n_\varepsilon+1}-AB|\right)+\\&\qquad\quad+\frac{1}{n+1}\left(|A_{n_\varepsilon}B_{n-n_\varepsilon}-AB|+|A_{n_\varepsilon+1}B_{n-n_\varepsilon-1}-AB|+\cdots+|A_{n-n_\varepsilon}B_{n_\varepsilon}-AB|\right)+\\&\qquad\qquad+\frac{1}{n+1}\left(|A_{n-n_\varepsilon+1}B_{n_\varepsilon-1}-AB|+\cdots+|A_{n-1}B_1-AB|+|A_nB_0-AB|\right)<\\&\qquad\qquad\qquad<\frac{n_\varepsilon}{n+1}\cdot 2\cdot M^2+\frac{n+1-2n_\varepsilon}{n+1}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n_\varepsilon}{n+1}\cdot 2\cdot M^2<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon .\end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że jeśli n jest dostatecznie duże ($n>m_\varepsilon$), to $\left|\frac{1}{n+1}\left(C_0+C-1+\cdots+C_{n-1}+C_n\right)-AB\right|<\varepsilon$, a to oznacza, że $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(C_0+C-1+\cdots+C_{n-1}+C_n\right)=AB$.