Pamiętnik z analizy matematycznej I 2002/2003

Michał Krych

tu mogą być jakieś błędy, choć starałem się ich unikać

1. Funkcja wykładnicza

Lemat rzeczywisty o granicach n-tych potęg ciągów „szybko zbieżnych" do 1

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^n = 1$.

Dowód. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n = 0$, więc istnieje liczba naturalna n_0 taka, że jeżeli $n > n_0$, to $|n\cdot a_n| < \frac{1}{2}$. Wtedy również $|a_n| = \frac{1}{n}\cdot(|n\cdot a_n|) < \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej $n > n_0$ zachodzą nierówności: $n\cdot a_n > -\frac{1}{2} > -1$, $\frac{a_n}{1+a_n} > -1$ oraz $\frac{n\cdot a_n}{1+a_n} < 1$, co usprawiedliwia dwukrotne stosowanie nierówności Bernoulli'ego w wierszu poniżej

$$1+n\cdot a_n \le (1+a_n)^n = \frac{1}{\left(1-\frac{a_n}{1+a_n}\right)^n} \le \frac{1}{1-\frac{na_n}{1+a_n}}$$

Czytelnik zwróci uwagę na to, że dzięki wyborowi n_0 stosowanie nierówności Bernoulli'ego prowadzi do wyrażeń dodatnich, więc przejście do ich odwrotności jest usprawiedliwione – stosowaliśmy nierówność Bernoulli'ego do mianownika! Teza lematu wynika z twierdzenia o trzech ciągach, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n\cdot a_n) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{n\cdot a_n}{1+a_n}\right)^{-1}$. Lemat został udowodniony.

Lemat o monotoniczności ciągu $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$

Jeśli $n > -x \neq 0$, to $a_{n+1} > a_n$, czyli ciąg $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ jest rosnący *od pewnego momentu*.

Dowód. Z nierówności $n > -x$ wynika od razu nierówność $n+1 > -x$. Z pierwszej z nich wnioskujemy, że $1+\frac{x}{n} > 0$, a z drugiej – że $1+\frac{x}{n+1} > 0$. Nierówność $a_n < a_{n+1}$ równoważna jest nierówności $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$, a ta z kolei – nierówności natępującej: $\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} > \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \frac{n}{n+x}$. Skorzystamy teraz z nierówności Bernoulli'ego, by udowodnić, że ostatnia nierówność zachodzi dla $n > -x$. Mamy

$$\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \ge 1-(n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)} = 1-\frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}.$$

Dla jasności należy jeszcze zauważyć, że liczba $\frac{-x}{(n+x)(n+1)}$, pełniąca rolę a w nierówności Bernoulli'ego, jest większa od -1 – jest to oczywiste w przypadku $x \le 0$, bo w tym przypadku jest ona nieujemna, zaś dla $x > 0$ jej wartość bezwzględna, czyli $\frac{x}{(n+x)(n+1)}$ jest mniejsza od $\frac{1}{n+1} < 1$. Dowód lematu został zakończony.

Uwaga. Wykazaliśmy, że od momentu, w którym wyrażenie $1+\frac{x}{n}$ staje się dodatnie, ciąg zaczyna rosnąć (w przypadku $x=0$ jest stały). W przypadku $x>0$ jest rosnący, gdy $x<0$, to może się zdarzyć, że początkowe wyrazy zmieniają znak, więc o monotoniczności nie może być nawet mowy. Jeśli jednak wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie, to jest niemalejący. Dodajmy jeszcze, że w przypadku $x>0$, wyrazy ciągu są dodatnie, zaś w przypadku $x<0$ są one dodatnie dla n parzystego a dla n nieparzystego – o ile $n>-x$.

Wykażemy, że ciąg $\left((1+\dfrac{x}{n})^n\right)$ jest ograniczony z góry w przypadku dowolnej liczby rzeczywistej x. Dla ujemnych x tak jest, bo od pewnego miejsca (dla $n>-x$), wyrazy ciągu są dodatnie i mniejsze od 1. Wobec tego w tym przypadku ciąg ten jest zbieżny do granicy znajdującej się w przedziale otwarto–domkniętym $(0,1]$ (liczba 0 nie jest granicą tego ciągu, bo od pewnego miejsca ma on wyrazy dodatnie i jest rosnący).

Jeśli $n>x>0$, to $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=\dfrac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{(1+\frac{-x}{n})^n}$. Mianownik, $\left(1+\dfrac{-x}{n}\right)^n$, ma granicę skończoną i dodatnią na mocy tego, co wykazaliśmy wcześniej, licznik ma granicę 1 na mocy lematu o granicach n–tych potęg ciągów szybko zbieżnych do 1, bo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\dfrac{-x^2}{n^2}\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{n}=0$. Wobec tego ciąg $\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)$ ma granicę na mocy twierdzenia o granicy ilorazu ciągów zbieżnych.

Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby rzeczywistej x ciąg $\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)$ ma granicę skończoną i dodatnią.

Definicja najważniejszej funkcji wykładniczej $\quad e^x:=\exp(x):=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$

Podstawowe własności funkcji exp

1. $\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y.

2. Jeśli $x<y$, to $\exp(x)<\exp(y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y.

3. $\exp(x)\geq 1+x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Dowód. Wiemy, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x,y liczba $\exp(x+y)$ jest dodatnia, można więc przez tę liczbę dzielić. Mamy

$$\frac{\exp(x)\cdot\exp(y)}{\exp(x+y)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+\dfrac{x}{n})(1+\dfrac{y}{n})}{1+\dfrac{x+y}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\dfrac{xy}{n^2}}{1+\dfrac{x+y}{n}}\right)^n=1$$

Ostatnia równość wynika z lematu i z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\dfrac{\dfrac{xy}{n^2}}{1+\dfrac{x+y}{n}}\right)=0$. Pierwsza własność jest udowodniona.

Własność trzecia wynika z tego, że dla $n>-x$ zachodzi nierówność $\dfrac{x}{n}>-1$, zatem – na mocy nierówności Bernoulli'ego – możemy napisać $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\geq 1+n\cdot\dfrac{x}{n}=1+x$. Skoro począwszy od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są równe co najmniej $1+x$, to i granica tego ciągu jest większa lub równa $1+x$. (Przekonamy się później, że nierówność jest ostra dla każdej liczby $x \neq 0$.)

Wykażemy, że prawdziwa jest własność druga. Niech $x<y$. Na mocy już wykazanych własności mamy wtedy $\exp(y)=\exp(x)\cdot\exp(y-x)\geq\exp(x)\cdot(1+y-x)>\exp(x)$. Koniec dowodu.

Uwaga o jednoznaczności funkcji exp.

Z własności pierwszej wynika, że $\exp(x)=\exp(\frac{x}{2})\cdot\exp(\frac{x}{2})=\big(\exp(\frac{x}{2})\big)^2\geq 0$. Gdyby dla jakiejkolwiek liczby $a\in\mathbb{R}$ było $\exp(a)=0$, to musiałoby być też $\exp(x)=\exp(a)\cdot\exp(x-a)=0$, więc funkcja exp byłaby funkcją stałą, więc nie przysługiwałaby jej własność druga. Wykażemy później, że własności podstawowe funkcji exp przysługują jedynie tej funkcji, innymi słowy można zdefiniować funkcję exp jako funkcję określoną na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych spełniającą trzy własności podstawowe. Właśnie pokazaliśmy, że każda taka funkcja musi być dodatnia! ■

Kilka następnych własności funkcji wykładniczej

4. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n)=+\infty$.

5. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n)=0$.

6. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n)=\exp(x)$.

7. Jeśli $x<1$, to $\exp(-x)\leq\dfrac{1}{1-x}$.

8. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x>0$ zachodzi nierówność $\exp(x)-1\leq x\cdot\exp x$.

9. Jeśli $x<y$, to $0<\exp(y)-\exp(x)<(y-x)\exp(y)$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=\exp(x)$.*

Dowód. Własność czwarta wynika od razu z nierówności $\exp(x_n)\geq 1+x_n>x_n$. Teraz wywnioskujemy własność piątą. Mamy $\exp(0)=\exp(0+0)=\exp(0)\cdot\exp(0)$, więc ponieważ $\exp(0)>0$, to $\exp(0)=1$. Stąd wynika, że $1=\exp(0)=\exp(x+(-x))=\exp(x)\cdot\exp(-x)$, zatem dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi wzór $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$. Jeśli więc $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)=+\infty$ i wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\exp(-x_n)}=\dfrac{1}{+\infty}=0$. Na mocy własności drugiej $\exp(-x)\geq 1+(-x)=1-x$. Jeśli więc $x<1$, to $\exp(x)=\dfrac{1}{\exp(-x)}\leq\dfrac{1}{1-x}$. Wykazaliśmy własność siódmą. Kolej na własność dziesiątą. Załóżmy, że $n>|x|$, czyli $|\frac{x}{n}|<1$. Mamy $\exp(x)=\big(\exp\left(\frac{x}{n}\right)\big)^n\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ oraz $\exp(x)=\big(\exp\left(\frac{x}{n}\right)\big)^n\leq\dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}=\dfrac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}$ i wobec tego możemy napisać $\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\exp(x)\leq\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\leq\exp(x)$, a ponieważ na mocy lematu o potęgach ciągów

---

* Wykażemy te własności korzystając już tylko z trzech własności podstawowych i dodatniości funkcji exp, którą wywnioskowaliśmy z własności podstawowych w uwadze o jednoznaczności funkcji exp, więc wykazawszy, że własność dziesiąta wynika z własności podstawowych, wykażemy zarazem, że definiują one funkcję wykładniczą o podstawie e

szybko zbieżnych do 1 mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n=1$, więc własność dziesiąta wynika teraz z twierdzenia o trzech ciągach. Teraz wykażemy prawdziwość własności ósmej dla $x>0$. Mamy $|\exp(x)-1|=$ $\exp(x)-1=\left(\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n-1=\left(\exp\left(\frac{x}{n}\right)-1\right)\left(\left(\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-1}+\left(\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-2}+\cdots+\exp\left(\frac{x}{n}\right)+1\right)\leq$

$$\leq\left(\exp\left(\tfrac{x}{n}\right)-1\right)\cdot n\cdot\left(\exp\left(\tfrac{x}{n}\right)\right)^{n-1}\leq\left(\frac{1}{1-\frac{x}{n}}-1\right)\cdot n\cdot\exp\left((n-1)\tfrac{x}{n}\right)\leq$$

$$\leq\frac{x}{1-\frac{x}{n}}\cdot\exp(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}x\cdot\exp(x)$$

Korzystaliśmy kilkakrotnie „po drodze” z tego, że jeśli $u<v$, to $\exp(u)<\exp(v)$. Nadeszła kolej na własność dziewiątą. Niech $x<y$. Mamy wtedy

$0<\exp(y)-\exp(x)=\exp(x)\cdot(\exp(y-x)-1)\leq\exp(x)\cdot(y-x)\cdot\exp(y-x)=(y-x)\cdot\exp(y)$.

Została do dowodu własność siódma. Niech $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in\mathbb{R}$. Ciąg zbieżny musi być ograniczony, więc istnieje liczba $M\in\mathbb{R}$, taka że $|x|,|x_n|\leq M$ dla każdego n. Na mocy własności dziewiątej mamy $0\leq|\exp(x_n)-\exp(x)|\leq|x_n-x|\cdot\exp(\max(x_n,x))\leq|x_n-x|\exp(M)$. Pozostaje zastosować twierdzenie o trzech ciągach. Otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty}|\exp(x_n)-\exp(x)|=0$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n)=\exp(x)$. Podaliśmy dowody wszystkich wymienionych własności. ■

Twierdzenie o istnieniu logarytmu naturalnego

Dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x, dla której mam miejsce równość $y=\exp(x)$.

Dowód. Niech $E=\{t\in\mathbb{R}:\quad\exp(t)\leq y\}$. Wykażemy, że zbiór E jest niepusty i ograniczony z góry. Mamy $\exp\left(-\frac{1}{y}\right)\leq\dfrac{1}{1+\frac{1}{y}}=\dfrac{y}{1+y}<y$, zatem $\frac{1}{y}\in E$, jeśli $t\geq y$, to zachodzą nierówności $\exp(t)\geq\exp(y)\geq1+y>y$, zatem $t\notin E$, a to oznacza, że liczba y jest ograniczeniem górnym zbioru E, nie twierdzimy, że najmniejszym! Niech $x=\sup E$. Wykażemy, że $y=\exp(x)$. Jeśli tak nie jest, to zachodzi jedna z dwu możliwości: $y<\exp(x)$ lub $y>\exp(x)$. Załóżmy, że $y<\exp(x)$. Załóżmy teraz, że $\tau<1-\frac{y}{\exp(x)}$. Wtedy $\exp(x-\tau)\geq\exp(x)\cdot(1-\tau)\geq\exp(x)\cdot\frac{y}{\exp(x)}=y$, a to oznacza, że wbrew założeniu x nie jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru E – liczba $x-\left(1-\frac{y}{\exp(x)}\right)<x$ też jest ograniczeniem górnym i to zapewne nie najmniejszym. Wobec tego przyjmijmy, że $y>\exp(x)$. Niech $0<\tau<1-\frac{\exp(x)}{y}$. Prawdziwa wobec tego jest nierówność $\exp(x+\tau)=\exp(x)\cdot\exp(\tau)<\exp(x)\cdot\frac{1}{1-\tau}<\exp(x)\cdot\dfrac{1}{1-\left(1-\frac{\exp(x)}{y}\right)}=y$. Wykazaliśmy więc, że w tym przypadku liczba x nie jest ograniczeniem górnym zbioru E i w ten sposób wykluczyliśmy obie nierówności. Wobec tego $y=\exp(x)$. Jeśli $t<x$, to $\exp(t)<\exp(x)=y$, jeśli $t>x$, to $\exp(t)>\exp(x)=y$. Wobec tego dla $t\neq x$ mamy $\exp(t)\neq\exp(x)=y$, co dowodzi, że liczba x jest jedyną o żądanej własności. Twierdzenie zostało udowodnione. ■

Definicja logarytmu naturalnego

Logarytmem naturalnym liczby dodatniej y nazywamy taka liczbę rzeczywistą x, że $y=\exp(x)$. Piszemy $x=\ln y$. ■

Własnościom funkcji wykładniczej odpowiadają własności logarytmu.

Własności logarytmu naturalnego

a. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

b. Jeśli $0 < x < y$, to $\ln(x) < \ln(y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

c. Jeśli $-1 < x$, to $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

d. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i dla każdego n liczba x_n jest dodatnia, to $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = +\infty$.

e. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i dla każdego n liczba x_n jest dodatnia, to $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = -\infty$.

f. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$ i dla każdego n zachodzi $x_n > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x$.

Dowód. Własność **a**: $\exp(\ln(x \cdot y)) = x \cdot y$ na mocy definicji logarytmu. $\exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = x \cdot y$, co kończy dowód własności **a.** Teraz własność **b**. Jeśli $0 < x < y$ i $\ln(x) \geq \ln(y)$, to $x = \exp(\ln(x)) \geq \exp(\ln(y)) = y$, co przeczy założeniu o liczbach x i y. Z tej własności wynika, że jeśli $0 < 1 + x$, to ponieważ $1 + x \leq \exp(x)$, więc $\ln(1+x) \leq \ln(\exp(x)) = x$. Analogicznie jeśli $y < 1$, to $y = \ln(\exp(y)) \leq \ln\left(\dfrac{1}{1-y}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{y}{1-y}\right)$. Przyjmijmy więc $x = \dfrac{y}{1-y}$. Wtedy $y = \dfrac{x}{1+x}$. Warunek $1 > y = \frac{x}{1+x}$ równoważny jest temu, że $0 < 1 - y = \frac{1}{1+x}$, czyli temu, że $x > -1$. Kończy to dowód własności **c**. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i $M \in \mathbb{R}$, to d.d.d. n zachodzi nierówność $x_n > \exp(M)$, co oznacza, że $\ln(x_n) > \ln(\exp(M)) = M$. Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(x_n) = +\infty$, mamy więc dowód własności **d.** Jeśli teraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są dodatnie, to $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(x_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} \ln(\dfrac{1}{x_n}) = -\infty$, bo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = +\infty$. Do udowodnienia pozostała już tylko własność **f.** Wynika ona z własności **c**, twierdzenia o trzech ciągach, tego, że $|\ln(x_n) - \ln(x)| = |\ln \frac{x_n}{x}| = |\ln\left(1 + \frac{x_n - x}{x}\right)|$ i tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x}{x} = 0$. ■

Możemy teraz podać definicję potęgi o dowolnym wykładniku a i dowolnej *dodatniej* podstawie x, mianowicie: $x^a = \exp(a \ln(x))$. Z udowodnionych własności funkcji wykładniczej i logarytmu naturalnego wynikają łatwo własności potęg o dodatniej podstawie znane ze szkół średnich i podstawowych. Studenci zechcą się zastanowić nad tym, które z nich pozostają w mocy dla potęgi o wykładniku postaci $\frac{p}{q}$ w przypadku $p, q \in Z$, przy czym liczba q jest nieparzysta. Przyjmujemy też, że $0^x = 0$ dla $x > 0$, nie określamy symbolu 0^x w przypadku $x \leq 0$. Potęga o wykładniku całkowitym dodatnim określona jest w przypadku dowolnej podstawy standardowo.

Teraz zajmiemy się wykładnikami zespolonymi. Będziemy przyjmować zawsze, że $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + yi$ i oczywiście $i^2 = -1$. Przypominamy, że $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Mamy wtedy $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ oraz $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Lemat zespolony o granicach n-tych potęg ciągów „szybko zbieżnych" do 1

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot z_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + z_n)^n = 1$.

Dowód. Wykażemy, że zachodzi nierówność $|(1+z)^n - 1| \leq (1 + |z|)^n - 1$ korzystając z dwumianu Newtona i nierówności trójkąta. Zachodzą wzory:

$|(1+z)^n - 1| = \left|1 + \binom{n}{1}z + \binom{n}{2}z^2 + \dots + \binom{n}{n-1}z^{n-1} + z^n - 1\right| \le$

$\le \binom{n}{1}|z| + \binom{n}{2}|z|^2 + \dots + \binom{n}{n-1}|z|^{n-1} + |z|^n = (1+|z|)^n - 1\,.$

Ponieważ założyliśmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot z_n = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot|z_n| = 0$ i wobec tego, że zachodzi nierówność $|(1+z_n)^n - 1| \le (1+|z_n|)^n - 1$, a to ostatnie wyrażenie ma granicę 0 przy $n \longrightarrow \infty$, na mocy rzeczywistego lematu o potęgach ciągów szybko zbieżnych do 1, więc lemat zespolony wynika natychmiast z twierdzenia o trzech ciągach. ■

Teraz czeka nas dowód istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{z}{n})^n$. Musi on się różnić od dowodu w przypadku rzeczywistym, bo o żadnej monotoniczności tym razem mówić nie możemy, bo to pojęcie nie stosuje się do liczb nierzeczywistych. Zamiast niego wykorzystamy twierdzenie Cauchy'ego, wg. którego ciąg liczbowy spełniający warunek Cauchy'ego ma granicę skończoną.

Lemat o zbieżności ciągu $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{z}{n})^n$

Ciąg $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{z}{n})^n$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny.

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $n > m \ge k \ge 0$, to $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} < \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$.Wynika to natychmiast z tego, że $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k k!} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\cdot\frac{1}{k!}$, wobec tego zastępując w tym wzorze m przez $n > m$ zwiększamy mianowniki zachowując liczniki bez zmian, co oczywiście powoduje wzrost mnożonych ułamków. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
&\left|\left(1+\tfrac{z}{n}\right)^n - \left(1+\tfrac{z}{m}\right)^m\right| = \\
&= \Bigg|1 + \tbinom{n}{1}\tfrac{z}{n} + \tbinom{n}{2}\left(\tfrac{z}{n}\right)^2 + \dots + \tbinom{n}{n-1}\left(\tfrac{z}{n}\right)^{n-1} + \left(\tfrac{z}{n}\right)^n - \\
&- \left(1 + \tbinom{m}{1}\tfrac{z}{m} + \tbinom{m}{2}\left(\tfrac{z}{m}\right)^2 + \dots + \tbinom{m}{m-1}\left(\tfrac{z}{m}\right)^{m-1} + \left(\tfrac{z}{m}\right)^m\right)\Bigg| \le \\
&\quad \le [1-1] + \left[\tbinom{n}{1}\tfrac{1}{n} - \tbinom{m}{1}\tfrac{1}{m}\right]|z| + \left[\tbinom{n}{2}\tfrac{1}{n^2} - \tbinom{m}{2}\tfrac{1}{m^2}\right]|z|^2 + \dots + \left[\tbinom{n}{m}\tfrac{1}{n^m} - \tbinom{m}{m}\tfrac{1}{m^m}\right]|z|^m + \\
&\qquad + \tbinom{n}{m+1}\tfrac{1}{n^{m+1}}|z|^{m+1} + \dots + \tbinom{n}{n-1}\tfrac{1}{n^{n-1}}|z|^{n-1} + |z|^n = \left(1+\tfrac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\tfrac{|z|}{m}\right)^m.
\end{aligned}$$

Ponieważ ciąg $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$ jest zbieżny (liczba $|z|$ jest rzeczywista!), więc spełnia on warunek Cauchy'ego, wobec tego również ciąg $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego – wykazaliśmy bowiem, że odległości między wyrazami tego ostatniego nie przekraczają odległości odpowiednich wyrazów ciągu $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$. Lemat został dowiedziony. ■

Definicja funkcji wykładniczej o wykładniku zespolonym i podstawie e

$$e^z := \exp(z) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n .\blacksquare$$

Podstawowe własności funkcji zespolonej exp

c1. Dla dowolnych liczb zespolonych z, w zachodzi równość $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$.

c2. Dla dowolnego ciągu (z_n) liczb zespolonych różnych od 0 zbieżnego do 0 zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\exp(z_n)-1}{z_n} = 1\,.$$

Dowód. Własność **c1** wynika z lematu zespolonego o granicach n–tych potęg ciągów szybko zbieżnych do 1 w dokładnie taki sam sposób jak w przypadku rzeczywistym. Dla dowodu własności

c2 skorzystamy z własności rzeczywistej funkcji exp i wykazanej w dowodzie lematu o zbieżności ciągu $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)$ nierówności w przypadku $n > m = 1$ zakładając, że $|z| < 1$:

$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - (1+z)\right| \le \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n - (1+|z|) \le \exp(|z|) - (1+|z|) \le \frac{1}{1-|z|} - (1+|z|) = \dfrac{|z|^2}{1-|z|}$

Mamy więc $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - (1+z)\right| \le \dfrac{|z|^2}{1-|z|}$. Stąd przechodząc do granicy przy $n \longrightarrow +\infty$ otrzymujemy w przypadku $0 < |z| < 1$ nierówność $|\exp(z) - (1+z)| \le \dfrac{|z|^2}{1-|z|}$, z której własność **c2** wynika od razu: $\left|\dfrac{\exp(z)-1}{z} - 1\right| = \left|\dfrac{\exp(z)-(1+z)}{z}\right| \le \dfrac{|z|}{1-|z|}$. ■

Twierdzenie o jednoznaczności funkcji zespolonej exp

Jeśli funkcja $f\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ spełnia warunki

c1 dla dowolnych liczb zespolonych z, w zachodzi równość $f(z+w) = f(z)f(w)$,

c2 dla dowolnego ciągu (z_n) liczb zespolonych różnych od 0 zbieżnego do 0 zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)-1}{z_n} = 1,$$

to dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość $f(z) = \exp(z) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$.

Dowód. Niech $w_n = \dfrac{f\left(\frac{z}{n}\right)-1}{\frac{z}{n}}$. Z założenia wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$. Zachodzi również wzór $f\left(\frac{z}{n}\right) = 1 + w_n\frac{z}{n}$ i wobec własności *c1* mamy $f(z) = \left(f\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n = \left(1+w_n\frac{z}{n}\right)^n$. Mamy wobec tego $\left(\dfrac{1+w_n\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n = \left(1+\dfrac{(w_n-1)\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, bo $n\dfrac{(w_n-1)\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Stąd wynika, że $f(z) = \left(1+w_n\frac{z}{n}\right)^n = \left(\dfrac{1+w_n\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n \cdot \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\cdot\exp(z) = \exp(z)$, czyli $f(z) = \exp(z)$. ■

Kilka następnych własności funkcji zespolonej exp

c3. $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ dla każdej liczby zespolonej z.

c4. Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$.

c5. Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $|\exp(ix)| = 1$.

c6. $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}z) \le \exp(|z|)$ dla każdej liczby zespolonej z.

c7. Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $|\exp(ix) - 1| \le |x|$

Dowód. Mamy $\exp(\overline{z}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\overline{z}}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\overline{\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n} = \overline{\exp(z)}$. Wykazaliśmy **c3**. Z tej własności **c4** wynika przez podstawienie, a następna własność wynika stąd, że $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\cdot\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\cdot\exp(-ix) = \exp(ix+(-ix)) = \exp(0) = 1$. Następna własność wynika z poprzedniej, **c1** i tego, że $|\mathrm{Re}z| \le |z|$. Wykażemy **c7**. Mamy $|\exp(ix)-1| =$

$$\left|\exp(i\tfrac{x}{n})-1\right|\cdot\left|\exp\left(\tfrac{(n-1)}{n}ix\right)+\exp\left(\tfrac{(n-2)}{n}ix\right)+\cdots+\exp\left(\tfrac{1}{n}ix\right)+1\right| \le$$

$$\le \left|\exp(i\tfrac{x}{n})-1\right|\cdot\left(\exp\left|\tfrac{(n-1)}{n}ix\right|+\exp\left|\tfrac{(n-2)}{n}ix\right|+\cdots+\exp\left|\tfrac{1}{n}ix\right|+1\right) = n\left|\exp(i\tfrac{x}{n})-1\right| =$$

$$= \left|ix\frac{\exp(i\frac{x}{n})-1}{i\frac{x}{n}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

W ostatnim przejściu granicznym skorzystaliśmy oczywiście z własności **c2**. W ten sposób zakończyliśmy dowód. ■

Definicja funkcji sinus i kosinus

$\sin z = \frac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right)$, $\cos z = \frac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right)$ dla każdej liczby zespolonej z. ■

Wzór Eulera $e^{iz} = \exp(iz) = \cos z + i\sin z$ dla każdego $z \in \mathcal{C}$.

Wzór ten jest natychmiastową konsekwencją definicji sinusa i kosinusa. ■

Z tego, że $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$ (własność **c4**) wynika, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą, to $\cos x$ i $\sin x$ też są liczbami rzeczywistymi.

Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych

t1. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ dla każdej liczby zespolonej z.

t2. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ dla dowolnych $z, w \in \mathcal{C}$.

t3. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ dla dowolnych $z, w \in \mathcal{C}$.

t4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = 1$ dla każdego ciągu (z_n) liczb zespolonych różnych od 0 zbieżnego do 0.

Pierwsze trzy własności sprawdzamy korzystając bezpośrednio z definicji. Sprawdzenie ostatniej przeprowadzimy dla przykładu: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp(iz_n) - \exp(-iz_n)}{2iz_n} =$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp(iz_n) - 1}{iz_n} + \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp(-iz_n) - 1}{-iz_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. ■

Można wykazać, że własności **t1** – **t4** definiują parę funkcji złożoną z kosinusa i sinusa.

Kilka następnych własności sinusa i kosinusa

t5. $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ dla każdej liczby zespolonej z.

t6. $\sin z \pm \sin w = 2\sin\frac{z\pm w}{2}\cos\frac{z\mp w}{2}$, $\cos z + \cos w = 2\cos\frac{z+w}{2}\cos\frac{z-w}{2}$,

$\cos z - \cos w = -2\sin\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2}$ dla dowolnych $z, w \in \mathcal{C}$.

t7. $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$, $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$ dla dowolnych liczb *rzeczywistych* x, y.

t8. Istnieje liczba dodatnia ε taka, że jeśli $0 < x < \varepsilon$, to $\sin x > 0$ oraz $\cos x > 0$.

t9. Istnieje liczba dodatnia $\frac{\pi}{2}$ taka, że $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ i jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\sin x > 0$ oraz $\cos x > 0$.

t10. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, na przedziale $(0,\pi)$ funkcja sinus jest dodatnia, funkcja kosinus jest na przedziale $[0,\pi]$ malejąca, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$ funkcja sinus jest rosnąca, na przedziale $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ funkcja sinus maleje, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, na przedziale $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ funkcja sinus rośnie, $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$, na przedziale $[\pi, 2\pi]$ funkcja kosinus rośnie,

t11. Dla każdej liczby zespolonej z zachodzą równości $\cos(z+2\pi) = \cos z$ oraz $\sin(z+2\pi) = \sin z$.

t12. Dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y takiej, że $x^2 + y^2 = 1$, istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $t \in [0, 2\pi)$, taka że $x = \cos t$ i jednocześnie $y = \sin t$.

Dowód. Własność **t5** to natychmiastowa konsekwencja definicji sinusa i kosinusa, własność **t6** można wywnioskować z definicji – obliczenia są bardzo proste lub z własności **t2** i **t3** dokładnie tak, jak to czynią autorzy podręczników szkolnych. Własność **t7** wywnioskujemy z nierówności wykazanej wcześniej: $|\exp(ix) - 1| \le |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$ (**c7**). Mamy bowiem

$|\sin x - \sin y| \le |\exp(ix) - \exp(iy)| = |\exp(iy)| \cdot |\exp(ix - iy) - 1| = |\exp(i(x-y)) - 1| \le |x-y|$.

Dowód drugiej nierówności jest analogiczny. Wykażemy własność **t8**. Zauważmy, że istnieje $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, takie że jeśli $0 < x < \dfrac{1}{n}$, to $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{1}{2}$. Gdyby było inaczej, to istniałby ciąg (x_n), taki że $0 < x_n < \dfrac{1}{n}$ i jednocześnie $\dfrac{\sin x_n}{x_n} \leq \dfrac{1}{2}$, wbrew temu, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$. Wobec tego jeśli $0 < x < \frac{1}{n}$, to $\sin x > \frac{x}{2} > 0$. Jasne jest, że $\cos 0 = 1$. Wobec tego z własności **7** wynika, że jeśli $|x| < 1$, to $|\cos x - 1| = |\cos x - \cos 0| < 1$, zatem $\cos x > 1 - 1 = 0$. Wystarczy więc przyjąć, że $\varepsilon = \frac{1}{n}$ dla n tak dużego, że z nierówności $0 < x < \frac{1}{n}$ wynika nierówność $\sin x > 0$. Udowodniliśmy więc własność ósmą. Wykażemy teraz, że dla pewnej liczby dodatniej p zachodzi równość $\cos p = 0$. Niech α będzie liczbą dodatnią taką, że $\cos\alpha > 0$ i $\sin\alpha > 0$. Ponieważ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, więc $0 < \cos^2\alpha < 1$ i wobec tego $0 < \cos\alpha < 1$. Niech $a_0 = \cos\alpha$ i niech $a_n = \cos(2^n\alpha)$. Mamy więc $a_{n+1} = \cos(2\cdot 2^n\alpha) = \cos^2(2^n\alpha) - \sin^2(2^n\alpha) = 2\cos^2(2^n\alpha) - 1 = 2a_n^2 - 1$. Wobec tego $a_{n+1} - a_n = 2a_n^2 - a_n - 1 = (a_n - 1)(2a_n + 1)$. Jeśli wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to ciąg ten jest nierosnący ($a_n - 1 \leq 0$), więc ma granicę g. Mamy więc $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2a_n^2 - 1\right) = 2g^2 - 1$, a stąd wynika, że $g = 1$ lub $g = -\frac{1}{2}$. Pierwsza możliwość jest wykluczona, bo $1 > a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots$, zatem $1 > a_0 \geq g$. Druga też, bo granica ciągu liczb nieujemnych musi być nieujemna. Oznacza to, że wbrew uczynionemu założeniu, w ciągu (a_n) muszą wystąpić wyrazy niedodatnie. Albo występuje liczba 0 albo istnieje taka liczba naturalna n, że $a_n < 0$. W obu przypadkach zbiór $P = \{t > 0\colon \quad \cos s > 0 \text{ dla } 0 \leq s \leq t\}$ jest ograniczony z góry. Niech p oznacza jego kres górny. Oczywiście $p \geq 1$, bo dla $0 < t < 1$ zachodzi nierówność $\cos t > 0$. Jeżeli $\cos p > 0$, to dla $0 < t - p < \cos p$ zachodzi nierówność $\cos p - \cos t \leq |\cos t - \cos p| \leq |t - p| < \cos p$, zatem $0 < \cos t$, wobec tego kres górny zbioru P nie może być mniejszy niż $p + \frac{1}{2}\cos p$. Załóżmy teraz, że $\cos p < 0$. Niech $0 < p - t < -\cos p$. Mamy więc $\cos t - \cos p \leq |\cos t - \cos p| \leq |t - p| < -\cos p$, zatem $\cos t < 0$. Oznacza to, że w tym przypadku $\sup P \leq p + \cos p < p$. Pozostaje trzecia możliwość $\cos p = 0$. Wykazaliśmy więc istnienie dodatniej liczby p, dla której $\cos p = 0$ i to takiej, że jeśli $0 < t < p$, to $\cos t > 0$. Niech ε oznacza liczbę dodatnią, taką że jeśli $0 < t < \varepsilon$, to $\cos t > 0$ i $\sin t > 0$. Jeśli $0 < t < \varepsilon$, to $\sin 2t = 2\sin t\cos t > 0$. Jeśli więc $2\varepsilon \leq p$, to dla $0 < \alpha < 2\varepsilon$ zachodzą obie nierówności $\sin\alpha > 0$ i $\cos 2\alpha > 0$. Stosując ponownie to samo rozumowanie stwierdzamy, że na przedziale $(0, 4\varepsilon)$ funkcja sinus przyjmuje jedynie dodatnie wartości, zatem jeśli $4\varepsilon \leq p$, to również na przedziale $(0, 4\varepsilon)$ obie funkcje sinus i kosinus są dodatnie i można znów powtórzyć ten sam argument. Innymi słowy jeśli dla $0 < t < 2^n\varepsilon$ mamy $\sin t > 0$ i $\cos t > 0$, to na przedziale $(0, 2^{n+1}\varepsilon)$ funkcja sinus jest dodatnia. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\varepsilon = \infty$, więc istnieje liczba naturalna n taka, że $2^n\varepsilon \leq p < 2^{n+1}\varepsilon$. Oznacza to, że na przedziale $(0, p)$ obie funkcje sinus i kosinus są dodatnie. Wobec tego możemy przyjąć, że $\frac{\pi}{2} = p$. Mamy $\cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$, oczywiście $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$ oraz $\sin\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} > 0$, zatem $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Stąd wynika, że $\sin\pi = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Dalej $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2}\sin\pi = 0$ oraz $\sin\frac{3\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}\sin\pi = -1$ i wreszcie $\cos 2\pi = \cos^2\pi - \sin^2\pi = 1$ i

$\sin 2\pi = 2\sin\pi\cos\pi = 0$. W ten sposób obliczyliśmy wartości funkcji sinus i kosinus w punktach 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ i 2π. Jeśli $0 \le x < y \le \pi$, to $0 < \frac{y-x}{2} \le \frac{\pi}{2}$ i $0 < \frac{x+y}{2} \le \pi$, zatem zachodzi nierówność $\cos y - \cos x = -2\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{y+x}{2} < 0$, a to oznacza, że funkcja kosinus maleje na przedziale $[0,\pi]$. Wobec tego jest ona ujemna na przedziale $(\frac{\pi}{2},\pi]$. Jeśli więc $0 \le x < y \le \frac{\pi}{2}$, to $\sin y - \sin x = 2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2} > 0$, a zatem funkcja sinus jest rosnąca na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$, podobnie, jeśli $\frac{\pi}{2} \le x < y \le \pi$, to $0 < \frac{y-x}{2} < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2} < \frac{x+y}{2} < \pi$, zatem $\sin y - \sin x =$ $= 2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2} < 0$, zatem na przedziale $[\frac{\pi}{2},\pi]$ funkcja sinus maleje. Zachowanie się obu funkcji kosinus i sinus na przedziale $[\pi,2\pi]$ można bez trudu zbadać stosując oczywiste wzory $\cos(x+\pi) = \cos x\cos\pi - \sin x\sin\pi = -\cos x$ oraz $\sin(x+\pi) = \sin x\cos\pi + \cos x\sin\pi = -\sin x$. To kończy sprawdzenie prawdziwości własności dziesiątej. Własność jedenasta wynika natychmiast z wzorów $\cos(x+\pi) = -\cos x$ oraz $\sin(x+\pi) = -\sin x$, które już uzyskaliśmy. Pozostała do dowodu ostatnia własność. Niech $x^2 + y^2 = 1$. Załóżmy najpierw, że $y \ge 0$. Wtedy $\cos\pi = -1 \le x \le 1 = \cos 0$. Niech $t = \sup\{s \in [0,\pi]:\ \ \cos s \ge x\}$. Mamy trzy możliwości $x = \cos t$, $x < \cos t$, $x > \cos t$. W trzecim przypadku z nierówności $|\cos s - \cos t| \le |s-t| < |x-t|$ wynika, że t nie jest *najmniejszym* ograniczeniem górnym zbioru $\{s \in [0,\pi]:\ \ \cos s \ge x\}$; w drugim – z tej samej nierówności wnioskujemy, że liczba t w ogóle nie jest ograniczeniem górnym tego zbioru. Pozostaje pierwsza możliwość, czyli $x = \cos t$. Ponieważ na przedziale $[0,\pi]$ kosinus jest funkcją ściśle malejącą, więc w tym przedziale liczba t jest tylko jedna. Oczywiście $y = \sin t$, bo założyliśmy, że $y \ge 0$ i zachodzi równość $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$. Jeśli $y < 0$, to definiujemy liczbę $\tilde{t}$ tak, że $x = \cos\tilde{t}$, $0 < \tilde{t} < \pi$ i zastępujemy ją liczbą $t = \tilde{t} + \pi$. W ten sposób udowodniliśmy własność dwunastą.

Mamy teraz $\exp(\pi i) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, zatem

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Otrzymaliśmy zatem wzór, w którym występują pięć najważniejszych liczb w matematyce.