Klasówka z analizy matematycznej, 15 kwietnia 2003

1. Wykazać, że jeśli funkcja f jest klasy C^∞ i ciąg pochodnych $(f^{(n)})$ jest jednostajnie zbieżny na pewnym przedziale do funkcji g, to na tym przedziale funkcja g jest iloczynem funkcji wykładniczej przez stałą.

2. Wykazać, że jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla $x = 1$, to jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, 1]$.

3. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Będzie funkcją klasy C^1 i niech C będzie zbiorem złożonym z takich punktów $y \in \mathbb{R}$, dla których istnieje punkt $x \in \mathbb{R}$ taki, że $y = f(x)$ i $f'(x) = 0$. Wykazać, że C jest zbiorem miary 0.

4. Wykazać, że dla dowolnego zbioru domkniętego $A \subset \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^∞ taka, że $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in A$.

5. Znaleźć pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{x^2+x+1} \operatorname{arctg} t \cdot e^{-t^2}\, dt$.

6. Wykazać, że $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-(tx)^2}\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(tx)^2}\, dx} = f(0)$ dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dla której $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$.