Analiza I, Kolokwium I/2.
Punktacja: każde zadanie 25 punktów.

---

**1.** Znaleźć granice

$$(A) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} \qquad\qquad (B) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{1}{x}) \cdot (e^x + e^{-x} - 2)^{\frac{3}{2}}}{\ln(1+x) + \ln(1-x)}$$

---

**2.** (A) Wykazać, że funkcja $-\ln(\tan x)$ jest wypukła na przedziale $(0, \frac{\pi}{4})$.

(B) Wykazać, że jeśli $\alpha, \beta, \gamma$ są kątami trójkąta ostrokątnego, to

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) \cdot \tan(\frac{\beta}{2}) \cdot \tan(\frac{\gamma}{2}) \leq (\tan(\frac{\pi}{6}))^3.$$

---

**3.** Wykazać, że dla $x > 0$

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$$

---

**4.** Niech $f : R \to R$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną taką, że $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, oraz $f''(x) \geq f(x)$ dla $x \geq 0$. Wykazać, że $f(x) > 0$ dla $x > 0$.

Analiza I, Kolokwium II.
Punktacja jest podana przy każdym zadaniu.

---

**1.**

**A(10p.)** Znaleźć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-9}}\,dx$

**B(20p.)** Znaleźć całkę $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sqrt{3}\,\mathrm{sin}x}\,dx$

---

**2.**

**A(10p.)** Znaleźć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

**B(15p.)** Znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})^{1+\frac{1}{n}}\cdot(1+\frac{2}{n})^{1+\frac{2}{n}}\cdot\ldots\cdot(1+\frac{n}{n})^{1+\frac{n}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

---

**3.** Niech $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ będzie rosnącą, nieujemną funkcją ciągłą i niech

$$g(x)=\int_0^x tf(t)dt-\frac{x}{2}\int_0^x f(t)dt$$

**A(10p)** Znaleźć $g'(1)$, jeśli $f(1)=1$ i $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$.

**B(10p)** Wykazać, że funkcja $g$ jest rosnąca.

---

**4. (25p.)** Niech $f:R\to R$ będzie funkcją jednostajnie ciągłą i niech

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad x>0.$$

Wykazać, że jeśli $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$, to $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$