Analiza I, Kolokwium I.
Punktacja: każde zadanie 25 punktów.

---

1. Niech A, B będą niepustymi zbiorami liczb rzeczywistych takimi, że $a < b$ dla każdego $a \in A$ i $b \in B$. Wykazać, że $\sup A \leq \inf B$.

---

2. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest określony formułami

$$a_0 = c > 0, \quad a_{n+1} = a_n + (a_n - 1)^2.$$

(A) Sprawdzić, że ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest monotoniczny. Wykazać, że dla $c = \frac{1}{2}$ ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

(B) Wykazać, że dla $c = \frac{3}{2}$ ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest nieograniczony.

---

3. Znaleźć granice

$$\text{(A)} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^3 + 3n} \qquad \text{(B)} \quad \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{2}{n+1})^{3n}$$

---

4. (A) Wykazać, że jeśli $a_n \to 0$, to

$$\frac{a_1(1+\frac{1}{n}) + a_2(1+\frac{1}{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(1+\frac{1}{2}) + a_n(1+\frac{1}{1})}{n} \longrightarrow 0\ .$$

(B) Wykazać, że jeśli $a_n \to a$, $b_n \to b$, to

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1}{n} \longrightarrow ab\ .$$

Analiza I, Kolokwium II.
Punktacja: każde zadanie 25 punktów.
Rozwiązania poszczególnych zadań proszę pisać na osobnych kartkach

---

1. Wyjaśnić, czy następujący szereg jest zbieżny:

$$(\mathbf{A}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \qquad\qquad (\mathbf{B}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n}}$$

---

2. Wyjaśnić, czy następujący szereg jest zbieżny:

$$(\mathbf{A}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!} \qquad\qquad (\mathbf{B}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$$

---

3. Wyjaśnić, czy następujący szereg jest zbieżny bezwzględnie, warunkowo, lub jest rozbieżny:

$$(\mathbf{A}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{n}})) \qquad\qquad (\mathbf{B}) \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!}$$

---

4. Niech $0 < a_1 < a_2 < \ldots$ Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n})$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony z góry.