

**Klasówka z analizy matematycznej, 13 maja 2003**

1. Załóżmy, że  $f \in C^2([a, b])$ ,  $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$ . Wykazać, że

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right| \leq \frac{\sup |f''|}{24n^2} (b-a)^3.$$

2. Załóżmy, że  $f \in C([-1, 1])$  i  $f(x) = 0$ , jeśli  $|x| > \frac{1}{2}$ . Niech  $T_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^1 (1-u^2)^n du}$ .

Niech  $w_n(x) = \int_{-1}^1 T_n(x-u)f(u) du$ . Wykazać, że  $\int_{-\delta}^{\delta} T_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  dla każdej liczby  $\delta \in (0, 1)$ . Wykazać, że  $w_n \rightrightarrows f$  na  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ .

3. Załóżmy, że *pochodna* funkcji  $f \in C^1([0, \infty))$  jest ograniczona oraz że  $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ .

Wykazać, że  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

4. Znaleźć  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos \delta}}$ .