Klasówka z analizy matematycznej, 13 maja 2003

1. Załóżmy, że $f \in C^2\big([a,b]\big)$, $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$. Wykazać, że

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\Big) \right| \le \frac{\sup|f''|}{24n^2}(b-a)^3 .$$

2. Załóżmy, że $f \in C\big([-1,1]\big)$ i $f(x) = 0$, jeśli $|x| > \frac{1}{2}$. Niech $T_n(x) = \dfrac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^{1}(1-u^2)^n\,du}$.

Niech $w_n(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x-u)f(u)\,du$. Wykazać, że $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} T_n(u)\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ dla każdej liczby $\delta \in (0,1)$. Wykazać, że $w_n \rightrightarrows f$ na $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

3. Załóżmy, że *pochodna* funkcji $f \in C^1\big([0,\infty)\big)$ jest ograniczona oraz że $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$. Wykazać, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4. Znaleźć $\displaystyle\lim_{\delta\to 0} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos\delta}}$.