KILKA ZADAŃ O SZEREGACH

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeśli $a_n =$

a. $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

ą. $(-1)^n \frac{n+1}{(n+2)\sqrt{n}}$;

c. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

ć. $\frac{2^n \cdot n!}{n^n}$;

d. $(-1)^{n(n+1)/2}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

e. $\frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

ę. $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

f. $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

g. $\frac{1}{1000n+1}$;

h. $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$;

i. $\frac{(n!)^2}{2^n}$;

j. $\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4+3n)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (2+4n)}$;

k. $\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$;

l. $\frac{n^5}{2^n+3^n}$;

ł. $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;

m. $\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$;

n. $\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

ń. $\frac{((n+1)!)^n}{2!\cdot 4!\cdot 6!\cdot \ldots \cdot (2n)!}$;

o. $\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^k$, $k \in \mathbb{N}$;

ó. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

p. $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

r. $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$;

s. $\sqrt[n]{a} - 1$, $a > 0$;

ś. $\sqrt[n]{n} - 1$;

t. $\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2$;

u. $\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$;

w. $\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^n)}$, $x \neq -1$;

x. $e - (1+1/n)^n$;

y. $n^k x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$;

z. $\frac{n!\cdot e^n}{n^{n+p}}$, $p \in \mathbb{N}$;

ż* $(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}\frac{1}{n}$.

2. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeśli $a_n =$

a. $\dfrac{2^n x^{2^n}}{1+x^{2^n}}$;

b. $\dfrac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$, $x \neq \pm 1$;

c. nq^n, $|q| < 1$

d. $n^2 q^n$, $|q| < 1$;

e. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

f. $\frac{1}{n(n+3)(n+6)}$;

g. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

h. $\frac{1}{n(n+1)(n+3)(n+4)}$;

i. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\cdot(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$;

j. $\frac{n}{n^4+n^2+1}$;

k. $(-1)^n \frac{(2n+1)^3}{(2n+1)^4+4} = \frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} - \frac{7^3}{7^4+4} + \cdots$.

3. Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$.

4. Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{k^n}\right)$.

5. $\displaystyle\sum_{p,q\geq 2}\frac{1}{p^q-1}$, tu każda liczba p^q występuje jeden raz nawet wtedy, gdy $4^2 = 2^4$.

6. Wykazać, że dla dowolnego szeregu zbieżnego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich istnieje taki ciąg liczb dodatnich (b_n), którego granicą jest ∞, że $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ jest szeregiem zbieżnym.

Nie ma więc najwolniej zbieżnego szeregu.

7. Wykazać, że dla dowolnego szeregu rozbieżnego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich istnieje ciąg taki liczb dodatnich (b_n), którego granicą jest 0, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ jest szeregiem rozbieżnym. *Nie ma więc najwolniej rozbieżnego szeregu.*

8. Dowieść, że szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu (b_n) zbieżnego do 0 szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

9. Dowieść, że jeśli (a_n) jest dowolnym ciągiem liczb dodatnich rzeczywistych, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$ jest zbieżny. Niech $P = \lim_{n\to\infty} \big((1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\big)$. Wyrazić sumę szeregu za pomocą $P \in [1,\infty]$.

10. Dowieść, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a > -1$.

11. Dowieść, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy $a \geq 0$.

12. Dowieść, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) ma skończoną granicę. Podać przykład świadczący o nieprawdziwości twierdzenia odwrotnego.

13. Dowieść, że jeśli (a_n) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb dodatnich, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) jest ograniczony.

14. Dowieść, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (b_n) zbieżnego do 0 szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

15. Dowieść, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

16. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny dla każdego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$.

17. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny dla każdego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, którego ciąg sum częściowych jest ograniczony, wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

18. Niech $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = b_n$. Wykazać, że iloczyn szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ jest rozbieżny.

19. Czy ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum a_n^2$?

20. Czy ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich wynika zbieżność szeregu $\sum a_n^2$?

21*. Czy ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum a_n^3$?

22. Czy ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich wynika zbieżność szeregu $\sum a_n^3$?

23. Udowodnić następujące twierdzenie Cesàro: Jeśli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne i dla każdego n zachodzą wzory $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, $s_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$, to

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\big(s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, .$$

24. Udowodnić, że jeśli oba szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ i ich iloczyn są zbieżne, to zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \, .$$

25. Niech $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ i $c(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Udowodnić, że oba szeregi są zbieżne dla każdej liczby rzeczywistej x .

26. Udowodnić, że prawdziwe są równości:

a. $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$;

b. $c(x)c(y) - s(x)s(y) = c(x+y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;

c. $c(x)s(y) + s(x)c(y) = s(x+y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie $c(x), s(x)$ są szeregami zdefiniowanym w poprzednim zadaniu.

27. Dowieść, że jeśli ciąg (a_n) składa się z liczb dodatnich oraz $1 < \lim\limits_{n\to\infty} n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big) = g$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Wsk.: porównać szereg $\sum a_n$ *z szeregiem* $\sum \frac{1}{n^p}$, $1 < p < g$.

28. Dowieść, że jeśli ciąg (a_n) składa się z liczb dodatnich oraz $1 > \lim\limits_{n\to\infty} n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big)$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

29. Podać przykład takiego ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich dodatnich, dla którego zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big) = 1$ i szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

30. Podać przykład takiego ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich dodatnich, dla którego zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big) = 1$ i szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

31. Dowieść, że jeśli nierosnący ciąg (a_n) składa się z liczb dodatnich a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

32. Niech wyrazy szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będą dodatnie. Udowodnić, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zbieżne są również szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{a_n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[k]{a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k-1}}$.

33. Dowieść, że jeśli $|x| \le \frac{1}{2}$, to $\left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}\right| < 0{,}005$.

34. Dowieść, że jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny i $b_n = \frac{a_0 + 2a_1 + \cdots + 2^n a_n}{2^{n+1}}$, to zachodzi równość $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

35. Załóżmy, że wyrazy szeregu rozbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie i $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Dowieść, że szereg

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ jest rozbieżny;

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ jest rozbieżny;

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ jest zbieżny;

d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 \cdot a_n}$ jest zbieżny;

e. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n \cdot a_n}$ może być zbieżny lub rozbieżny.

36. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje dokładnie jeden taki ciąg liczb całkowitych nieujemnych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, że:
dla każdego $n \geq 2$ zachodzi nierówność $a_n \leq n-1$, przy czym jest ona jest ostra dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n , oraz $x = a_1 + \frac{1}{2!}a_2 + \frac{1}{3!}a_3 + \cdots$.
Dowieść, że $x \in \mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla prawie wszystkich n zachodzi równość $a_n = 0$.

37. Dowieść, że jeśli $0 < x \leq 1$, to istnieje dokładnie jeden taki ciąg liczb naturalnych, że $1 < k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \ldots$ oraz $x = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1 k_2 k_3} + \cdots$, przy czym liczba x jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna n_0 , że dla $n \geq n_0$ zachodzi równość $k_n = k_{n_0}$.

38. Czy zbieżność szeregu $\sum a_n$ wynika z tego , że dla każdej liczby $p \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0$?

39. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Czy wynika stąd zbieżność szeregu:
(a) $a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_{16} + a_{15} + a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{11} + a_{10} + a_9 + a_{32} + \cdots + a_{17} + a_{64} + \cdots$;
(b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{17} + \cdots + a_{31} + a_{18} + \cdots + a_{32} + \cdots$?

40. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny.

41. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ jest zbieżny.

42. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \big(\ln n\big)^a$ jest zbieżny?

43. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \ln n$ jest zbieżny?

44. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-an^2}$ jest zbieżny?

45. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \ln n \rfloor} \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

46. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnić, że następujące trzy warunki są równoważne:
(i) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;
(ii) ciąg (p_n) o wyrazie $p_n = (1+a_1)(1+a_2) \cdot \ldots \cdot (1+a_n)$ jest zbieżny;
(iii) istnieje taka liczba $k \in \mathbb{N}$, że ciąg (q_n) o wyrazie $q_n = (1-a_k)(1-a_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (1-a_n)$ ma granicę dodatnią i skończoną.
Uwaga. Jeśli $a_n \neq 1$ dla każdego n , to można przyjąć, że $k = 1$.

47. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n\pi}{5^{n-1}}$.

48. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(5+\cos n\pi)^n}$.

49. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4}$ jest zbieżny? Jeśli tak, to czy bezwzględnie?

50. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ jest rozbieżny.

51. Dowieść, że $\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots$.

52. Czy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ jest zbieżny?

53. Dowieść, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to zachodzi wzór $\ln(n+1) - \ln n = = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{7}\frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots\right)$.

54. Korzystając z wzoru z poprzedniego zadania obliczyć $\ln 2$ i $\ln 5$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku (bez użycia sprzętu elektronicznego).

55. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg jest zbieżny?

a. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} x^n$, $p \in \mathbb{R}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(3^n + (-2)^n\right) x^n$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^n$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^p x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n$, $a \in (0,1)$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$;

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} x^n$;

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^n n} x^n$;

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n \left(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\right) x^n$;

l. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} a^n + \frac{1}{n^2} b^n\right)^{n^2} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$, gdzie $a > 0$, $b > 0$;

m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 10^{\ell(n)} (2-x)^n$, $\ell(n)$ to liczba cyfr liczby n.

56. Wykazać, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \frac{3\pi}{4}$.

57. Wykazać, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\pi}{4}$.