Kilka pochodnych

poprawiono 21 grudnia 2011, godz. 0:09

1. Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, a (x_n) ciągiem liczb rzeczywistych. Niech I_n będzie przedziałem domkniętym o środku x_n i długości a_n. Dowieść, że istnieje liczba rzeczywista, która nie jest elementem żadnego z przedziałów I_n.

Uwaga: Niech $x_1' = \frac{1}{1}$, $x_2' = \frac{2}{1}$, $x_3' = \frac{2}{2}$, $x_4' = \frac{1}{2}$, $x_5' = \frac{3}{1}$, $x_6' = \frac{3}{2}$, $x_7' = \frac{3}{3}$, $x_8' = \frac{2}{3}$, $x_9' = \frac{1}{3}$, $x_{10}' = \frac{4}{1}$, $x_{11}' = \frac{4}{2}$, $\ldots$ ($x_{k^2+j}' = \lceil \frac{j}{k+2} \rceil \frac{k+1}{j} + \lfloor \frac{j}{k+2} \rfloor \frac{2k+2-j}{k+1}$ dla $j = 1, 2, \ldots, 2k+1$). W ciągu (x_n') występują wszystkie liczby wymierne dodatnie, zatem w ciągu $x_1 = 0$, $x_2 = -x_1'$, $x_3 = x_1'$, $x_4 = -x_2'$, $x_5 = x_2'$, $\ldots$ ($x_{2n} = -x_n'$, $x_{2n+1} = x_n'$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$) występują wszystkie liczby wymierne. Jeśli (I_n) i (a_n) są ciągami występującymi w treści zadania, to każda liczba **wymierna** jest środkiem jednego z przedziałów I_1, I_2, $\ldots$ i istnieje liczba x, siłą rzeczy niewymierna, która nie należy do ani jednego przedziału I_1, I_2, $\ldots$ ■

2. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.

3. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ i $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

4. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

5. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}$.

6. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, tu $m, n \in \mathbb{N}$.

7. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x+x^2)(13+x)(257+x^7)}{(2x+271)^{10}}$.

8. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x)(6+x)(11+x)(17+x)(24+x)}{(x^2+x+1)^3}$.

9. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x)(6+x)(11+x)(17+x)(24+x)(31+x)}{(x^2+x+1)^3}$.

10. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-6x^2+11x-6}$.

11. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^5-3x^4+x^3+13x^2-7x-30}{x^5+2x^4-5x^3-10x^2+4x+8}$.

12. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^{2009}-2009}{x^2-1}$.

13. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{257}-257x+256}{(x-1)^2}$.

14. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$, tu $m, n \in \mathbb{N}$.

15. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1}$.

16. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x}+\sqrt[10]{x}}{\sqrt{961x+1024}}$.

17. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{4+5x}-7}{x-9}$.

18. Znaleźć $\lim\limits_{x\to -32} \frac{\sqrt{17-x}-7}{2+\sqrt[5]{x}}$.

19. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{(1+x)^k}-1}{x}$, tu $k, n \in \mathbb{N}$.

20. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt{x}-8}$.

21. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+6x-14x^7}-3}{x+x^2+x^3}$.

22. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[81]{1+729x}-\sqrt[13]{1+117x}}{x^2+x^3}$.

23. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x}$.

24. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

25. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

26. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})\cdot\ldots\cdot(1-\sqrt[57]{x})}{(1-x)^{56}}$.

27. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

28. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1}\,)^n+(x+\sqrt{x^2-1}\,)^n}{x^n}$, tu $n\in\mathbb{N}$.

29. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$.

30. Znaleźć $\lim\limits_{a\to 0}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\lim\limits_{a\to 0}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $0\neq b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$.

31! Wykazać, że jeśli stopień wielomianu w jest dodatni i parzysty, to $\lim\limits_{x\to\infty} w(x)=\infty=\lim\limits_{x\to-\infty} w(x)$.

32! Wykazać, że jeśli stopień wielomianu w jest nieparzysty, to granice $\lim\limits_{x\to\infty} w(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} w(x)$ są nieskończone i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to\infty} w(x)=-\lim\limits_{x\to-\infty} w(x)$.

33. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ma w każdym punkcie granicę 0 , to istnieje taka liczba niewymierna a , że $f(a)=0$.

34. Dowieść, że nie istnieje taka funkcja $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla każdego rzeczywistego a zachodzi równość $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

35! Podać przykład takich dwu funkcji $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ i $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ i

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x)=0$,
(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x)=-13$,
(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x)=\infty$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x)=-\infty$,
(e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x)$ nie istnieje.

36! Podać przykład takich dwu funkcji $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ i $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ i

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=0$,
(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=-13$,
(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=\infty$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=-\infty$,
(e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)$ nie istnieje.

37. Niech C będzie zbiorem złożonym z tych liczb x z przedziału $[0,1]$, dla których istnieje taki ciąg (c_n) , że $c_n\in\{0,2\}$ dla każdego n i $x=\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\frac{c_3}{3^3}+\cdots$, czyli tych liczb $x\in[0,1]$, które mają rozwinięcie w układzie trójkowym złożone jedynie z zer i dwójek.[0.1] Wykazać, że każdy punkt skupienia zbioru C jest elementem tego zbioru.

38. Dowieść, że zbiór Cantora nie zawiera żadnego przedziału.

39. Dowieść, że jeśli $c_n, c'_n\in\{0,2\}$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c'_n}{3^n}$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^{n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c'_n}{2^{n+1}}$.

[0.1] Zbiór C nazywany jest zbiorem Cantora. Tej nazwy będziemy używać.

Niech $f\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^{n+1}}$. Dowieść, że funkcja f zdefiniowana w zbiorze Cantora C jest ciągła w każdym dziedziny i przekształca zbiór Cantora *na* przedział domknięty $[0,1]$.

40. Dowieść, że każda funkcja ciągła $g\colon[0,1]\longrightarrow C$ jest stała.

41. Dowieść, że jeśli $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, to każda liczba z przedziału $[0,1]$ jest punktem skupienia zbioru $\{na-\lfloor na\rfloor\colon\ \ n\in\mathbb{N}\}$.

42. Niech $\overline{A}$ będzie zbiorem złożonym ze wszystkich punktów zbioru $A\subseteq\mathbb{R}$ i ze wszystkich **skończonych** punktów skupienia zbioru A.

Udowodnić, że $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$ i $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$. Podać przykład zbiorów A,B, dla których $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$.

Uwaga: Zbiór $\overline{A}$ nazywamy domknięciem zbioru A. Zbiór jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jest równy swemu domknięciu. Przedział $[7,13]$ jest domknięty. Podobnie zbiór Cantora, półprosta $[666,\infty)$, zbiór $\{1,2,3,128\}$. Zbiory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $(0,1]$ nie są domknięte.

43! Zbiór wyrazów $\{a_n\colon\ \ n\in\mathbb{N}\}$ ciągu (a_n) jest nieskończony. Dowieść, że ciąg (a_n) ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a_n\colon\ \ n\in\mathbb{N}\}$ ma dokładnie jeden punkt skupienia.

44. Zdefiniować taką funkcję $a\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$, że:

(i) dla każdego $k\in\mathbb{N}$ istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}a(n,k)$ i $\lim\limits_{n\to\infty}a(k,n)$;

(ii) istnieją granice $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}a(n,k)$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty}a(n,k)$;

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}a(n,k)\neq\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty}a(n,k)$.

45. Dowieść, że każda nieujemna liczba rzeczywista jest punktem skupienia zbioru kwadratów wszystkich liczb wymiernych.

46. Załóżmy, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zbiór $F_n\subseteq\mathbb{R}$ jest domknięty i $\mathbb{R}=F_1\cup F_2\cup F_3\cup\ldots$. Dowieść, że istnieje taka liczba $k\in\mathbb{N}$, że zbiór F_k zawiera przedział.

47. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, to istnieje wtedy taka liczba $x_0\in[a,\infty)$, że $f(x)\geq f(x_0)$ dla każdego $x\in[a,\infty)$.

48. Podać przykład ograniczonej funkcji ciągłej określonej na półprostej $[0,\infty)$, która nie jest jednostajnie ciągła.

49! Podać przykład ograniczonej funkcji ciągłej $f\colon(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

50. Dowieść, że jeśli $A\subseteq\mathbb{R}$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, to każda funkcja ciągła $f\colon A\to\mathbb{R}$ jest ograniczona, osiąga swe kresy i jest jednostajnie ciągła.

51. Dowieść, że jeśli $A\subseteq\mathbb{R}$ jest zbiorem, który nie zawiera choćby jednego swego skończonego punktu skupienia, to istnieje funkcja ciągła $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$, która nie jest ograniczona ani z góry ani z dołu i nie jest jednostajnie ciągła.

52. Dowieść, że jeśli każda funkcja ciągła $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$ ma własność przyjmowania wartości pośrednich, tzn. jeśli liczba C znajduje się między liczbami $f(x)$ i $f(y)$, to istnieje takie $c\in A\cap(x,y)$, że $C=f(c)$, to zbiór A jest przedziałem.

53! Dowieść, że każda funkcja wypukła $f\colon(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła. Podać przykład funkcji wypukłej $f\colon[0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$, która ma punkt nieciągłości.

54. Niech $f(x)=x^6+6x^2+12x$ dla $x\in\mathbb{R}$. Niech $f(c)$ będzie najmniejszą wartością wielomianu f.

Dowieść, że $c^5+2c+2=0$. $(0\le f(x)-f(c)=(x-c)\ldots)$

Dowieść, że liczba c nie jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych, stopnia mniejszego niż 5.

Dowieść, że liczba $f(c)$ nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, stopnia pierwszego ani drugiego.

55. Podać przykład funkcji $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, która jest nieciągła w punkcie 0 i ma własność Darboux (przyjmowania wartości pośrednich).

56. Załóżmy, że $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ są takimi ciągami, że dla pewnej liczby $x_0\ne 0$ szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx_0^n$ są zbieżne. Udowodnić, że jeśli istnieje taki ciąg (x_j) liczb różnych od 0 zbieżny do 0, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_j^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx_j^n$ dla $j=1,2,\ldots$, to $a_n=b_n$ dla $n=0,1,2,\ldots$

57. Dowieść, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, to funkcja dana wzorem $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(-1,1]$.

58! Udowodnić, że jeśli funkcje $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$ i $g\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$ są ciągłe, to funkcje $\max(f,g)$ i $\min(f,g)$ zdefiniowane wzorami $\max(f,g)(x)=\max\big(f(x),g(x)\big)$ i analogicznie $\min(f,g)(x)=\min\big(f(x),g(x)\big)$ też są ciągłe.

59. Dowieść, że jeśli funkcja **różnowartościowa** $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ma własność Darboux, to f jest funkcją ciągłą.

60. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Dowieść, że istnieje funkcja niemalejąca $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, której jedynymi punktami nieciągłości są liczby a_1, a_2, a_3, ...

61. Zdefiniować taką jednostajnie ciągłą funkcję $f\colon[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla każdej liczby $L>0$ istnieją takie liczby $x,y\ge 0$, że $|f(x)-f(y)|>L|x-y|$.

62. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ograniczona na każdym przedziale ograniczonym i istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)$, to istnieje również granica $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ i spełniona jest równość $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)$.

63. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ograniczona na każdym przedziale ograniczonym i istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}$, to istnieje też granica $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}$ i spełniona jest równość $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}$.

64. Podać przykład funkcji $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, która ma dokładnie jeden punkt ciągłości.

65. Udowodnić, że istnieje funkcja $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, która nie jest ograniczona na żadnym przedziale.

66! Jeśli $f\colon B\cup C\longrightarrow\mathbb{R}$ jest taką funkcją, że jej ograniczenia $f_{|B}$ do zbioru B i $f_{|C}$ do zbioru C są ciągłe w punkcie $x_0\in B\cap C$, to funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

67. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła, nieograniczona z góry, nieograniczona z dołu, to przyjmuje każda wartość nieskończenie wiele razy.

68. Jeśli $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest taką funkcją ciągłą w co najmniej jednym punkcie, że dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x+y)=f(x)+f(y)$, to istnieje taka liczba $a\in\mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

69. Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją monotoniczną, że równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ma miejsce dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

70. Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją ograniczoną na przedziale (-1,1), że równość $f(x+y) = f(x)+f(y)$ ma miejsce dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

71. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2}\colon \quad x, y \in \mathbb{Q}\}$. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, że $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $f(1) = 1$.

Uwaga: w zbiorze $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ wykonalne są cztery działania arytmetyczne, mianowicie dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od 0.

72. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) := \{\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6}\colon \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}\}$. Znaleźć wszystkie takie funkcje

$$f\colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}),$$

że $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ i $f(1) = 1$.

73! Dowieść, że jeśli wielomian v nie ma pierwiastków rzeczywistych i stopień wielomianu w nie jest większy niż stopień wielomianu v, to iloraz $\frac{w}{v}$ jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}$,

74. Rozstrzygnąć czy:

(a) kwadrat funkcji nieciągłej musi być funkcją nieciągłą;

(b) sześcian funkcji nieciągłej musi być funkcją nieciągłą.

75! Dowieść, że jeśli funkcja f jest ciągła, to funkcja $|f|$ też jest ciągła. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

76. Dowieść, że dla każdego wielokąta wypukłego istnieje prosta, która dzieli jednocześnie obwód i pole wielokąta na połowy.

77. Dowieść, że na brzegu każdego wielokąta wypukłego leżą cztery punkty, które są wierzchołkami pewnego kwadratu.

78. Niech $f\colon [3, 12] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że zachodzi równość $f(3) = f(12)$. Udowodnić, że dla pewnego $x \in [3, 12]$ zachodzi równość $f(x) = f(2x)$.

79. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, a $c \in (0, 1)$ taką liczbą, że nierówność $|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|$ jest spełniona dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna liczba $x_0 \in \mathbb{R}$, dla której zachodzi równość $f(x_0) = x_0$.

80. Podać przykład takiej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że jeśli $x \neq y$, to $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(x) > x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

81. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Niech $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{n literek f}}$, czyli $f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n literek f}}(x)\ldots))$. Dowieść, że jeśli nierówność $|f^n(x)-f^n(y)| \leq c|x-y|$ jest spełniona dla pewnej liczby $c \in (0, 1)$ i wszystkich liczb $x, y \in \mathbb{R}$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba $x_0 \in \mathbb{R}$, że $f(x_0) = x_0$.

82. Niech $f\colon [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x) = 1 - |2x - 1|$. Niech $f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n literek f}}(x)\ldots))$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ustalić liczbę rozwiązań równania $f^n(x) = x$.

83. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, obraz $f([a,b])$ przedziału $[a,b]$ jest przedziałem o długości $b-a$.

84. Niech $C \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym a $f\colon C \longrightarrow C$ — funkcją niemalejącą. Udowodnić, że $f(p) = p$ dla pewnego punktu $p \in C$.

85. Niech $0 < c < 1$ i niech $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & \text{dla } x \in [0,c] \\ \frac{1-x}{1-c} & \text{dla } x \in [c,1] \end{cases}$. Punkt x ma okres n wtedy i tylko wtedy, gdy n jest najmniejszą z liczb naturalnych $k \geq 1$, dla których zachodzi równość $\underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{k literek f}}(x)\ldots)) = x$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją punkty, które mają okres n i że jest tych punktów skończenie wiele.

86*. Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że dla każdej liczby $x > 0$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = 0$. Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

87. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ dla $x \notin \{1,2\}$, $f(1) = f(2) = 0$.

88. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{2x^2-3x+1}$ dla $x \notin \{1, \frac{1}{2}\}$, $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

89. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$.

90. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{p}{q+1}, & \text{gdy } x = \frac{p}{q},\ q \geq 1,\ p,q \in \mathbb{Z},\ \mathrm{nwd}(p,q) = 1. \end{cases}$$

91. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli g jest funkcją Riemanna i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) = (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)g(x)$.

92. Z wypukłości funkcji x^2 wywnioskować, że jeśli $a, b, c > 0$, to zachodzi nierówność

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c} \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

93. Dowieść, że jeśli $n > 1$ jest liczbą naturalną, to funkcja $\sqrt[n]{x}$ jest ściśle wklęsła na $[0,\infty)$.

94. Dowieść, że jeśli $n > 1$ jest liczbą naturalną, to funkcja $\sqrt[n]{x}$ jest jednostajnie ciągła na $[0,\infty)$.

95! Załóżmy, że funkcja $f\colon B \cup C \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze B i na zbiorze C oraz $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset \neq C$. Czy wynika stąd jednostajna ciągłość na zbiorze $B \cup C$?

96. Czy funkcja $\frac{x}{1+x^2}$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

97. Czy funkcja $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

98. Czy istnieje jednostajnie ciągła funkcja określona na półprostej $[0,\infty)$, która przekształca tę półprostą na $\mathbb{R}$?

99. Czy istnieje różnowartościowa funkcja ciągła określona na półprostej $[0,\infty)$, która przekształca tę półprostą na $\mathbb{R}$?

100. Zdefiniować różnowartościową funkcje ciągłą przekształcającą półprostą $(0,\infty)$ na $\mathbb{R}$.

101. Czy istnieje różnowartościowa funkcja jednostajnie ciągła przekształcającą półprostą $(0,\infty)$ na $\mathbb{R}$?

102. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, to dla każdej liczby $d > 0$ istnieje taka liczba M, że jeśli $|x_1 - x_2| \leq d$, to $\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leq M$.

103. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, to f jest ciągła jednostajnie.

104. Rozstrzygnąć, czy z tego że funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ oraz $g\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

jest jednostajnie ciągła, wynika, że ich iloczyn jest funkcją jednostajnie ciągłą.

105. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin\sqrt[3]{x}$ jest jednostajnie ciągła.

106. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin x^3$ jest jednostajnie ciągła.

107. Wykazać, że jeśli funkcja ściśle wypukła jest ciągła i **nie** jest monotoniczna, to ma wartość najmniejszą i ta najmniejsza wartość jest przyjmowana w dokładnie jednym punkcie, przy czym jest to punkt wewnętrzny dziedziny funkcji.

108. Wykazać, że jeśli funkcje f i g są wypukłe, funkcja g jest niemalejąca, to funkcja $g\circ f$ jest *wypukła*, jeśli natomiast g jest nierosnąca, to złożenie $g\circ f$ *może* być funkcją *wklęsłą*, *wypukłą* lub być ściśle wypukła na jednym przedziale, a na drugim ściśle wklęsła.

109. Czy funkcja ciągła f, wypukła na każdym z przedziałów $[a,b]$ i $[b,c]$ musi być wypukła na przedziale $[a,c]$?

110. Podać przykład dwu funkcji dodatnich ściśle wypukłych, których iloczyn jest ściśle wklęsły.

111. Wykazać, że iloczyn dwu dodatnich funkcji wypukłych, niemalejących jest wypukły. Czy iloczyn dwu funkcji wypukłych, nierosnących musi być wypukły?
Sformułować odpowiednie twierdzenie dla funkcji wklęsłych.

112! Dowieść, że $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$.

113! Dowieść, że jeśli $a,b\in\mathbb{R}$, $a>1$, to $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-b}a^x = \infty$.

114! Dowieść, że $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a} = 0$ dla każdej liczby $a>0$.

115! Dowieść, że $\lim\limits_{x\to 0} x^a\ln x = 0$ dla każdej liczby $a>0$.

116! Dowieść, że jeśli $0<a\neq 1$, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a x}{x} = \log_a e$.

117. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Big(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 2e\Big)$.

118. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, jeśli $f(x) =$

a. $(\ln x)^{1/x}$;

b. $\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{x^3/(1-x)}$;

c. $\left(\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+5}\right)^x$

d. $\left(\frac{x^3+11x+20}{x^3-x^2+121}\right)^{x+7}$;

e. $\left(\frac{x+13}{x-13}\right)^{x^7-7}$;

f. $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$;

g. $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x\sqrt{x}}$

h. $\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)^x$.

119. Znaleźć: **a.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}$; **b.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

120. Niech $f\colon\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie taką funkcją ściśle monotoniczną, że dla dowolnych $m,n\in\mathbb{N}$ zachodzi wzór $f(mn)=f(m)+f(n)$. Dowieść, że istnieje taka liczba $a>0$, $a\neq 1$, że równość $f(n)=\log_a n$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej n.

121*. Niech $a_1 = x > 0$ i $a_{n+1} = x^{a_n}$ dla $n=1,2,\ldots$. Dla jakich liczb rzeczywistych $x>0$ ciąg (a_n) ma granicę?

122. Udowodnić, że jeśli $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ a^x \geq 1+x$, to $a=e$.

123. Wykazać, że $\ln x < -1 + \ln 10 + \frac{x}{10}$ dla $0<x\neq 10$.

124. Wykazać, że $\ln x < \frac{1}{2}(x^2-1)$ dla $0<x\neq 1$.

125. Dowieść, że funkcja $x\ln x$ jest ściśle wypukła na $(0,\infty)$.

126. Wykazać, że jeśli $x>0$, $y>0$ i $z>0$, to zachodzi nierówność $x\ln x+2y\ln y+3z\ln z+(x+2y+3z)\ln 6\geq \geq(x+2y+3z)\ln(x+2y+3z)$. Kiedy zachodzi równość?

127. Wykazać, że nierówność $\left(\frac{x+2y}{3}\right)^{\frac{x+2y}{3}}<\frac{x^x+2y^y}{3}$ zachodzi dla dowolnych *różnych* liczb rzeczywistych dodatnich x, y.

128. Wykazać, że $(2-\sqrt{3})a^{2+\sqrt{3}}+(2+\sqrt{3})b^{2-\sqrt{3}}\geq 4\sqrt[4]{ab}$ dla dowolnych $a>0$ i $b>0$.

129. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b równanie $\ln x=ax+b$ ma dokładnie dwa rozwiązania, dokładnie jedno rozwiązanie lub nie ma rozwiązań w ogóle.

130. Dowieść, że $2^{1-p}\leq x^p+(1-x)^p\leq 1$ dla dowolnych liczb $p>1$ i $x\in[0,1]$.

131. Dowieść, że jeśli liczby a,b,c są długościami boków trójkąta a α, β, γ — kątami leżącymi naprzeciw kolejnych boków, to zachodzi nierówność $\frac{\pi}{3}\leq\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$.

132. Rozwiązać nierówność
$$\cos x\leq\left|\sqrt{1+\sin(2x)}-\sqrt{1-\sin(2x)}\right|\leq\sqrt{2}.$$

133. Czy istnieje taka liczba $x\in\mathbb{R}$, że $\frac{1}{3}\leq\frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}x}\leq 3$?

134. Czy ciąg $\left(\operatorname{tg}n\right)$ ma granicę?

135. Czy ciąg $\left(\sin^2 n\right)$ ma granicę?

136. Czy ciąg $\left(\sin(n^2)\right)$ ma granicę?

137*. Czy ciąg $\left(\sin(n^k)\right)$ ma granicę dla $k\in\mathbb{N}$?

138*. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n^2)$ jest zbieżny?

139. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$

140. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$.

141. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}$.

142. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\sin^{-3}x}$.

143. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$.

144. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin(\ln(x+1))-\sin(\ln x)\right)$.

145. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

146. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

147. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

148. Korzystając z wklęsłości funkcji sinus na przedziale $[0,\pi]$ dowieść, że spośród n–kątów wpisanych w dany okrąg, największy obwód ma n–kąt foremny.

149. Korzystając z wypukłości funkcji tangens na przedziale $[0,\frac{\pi}{2})$ dowieść, że spośród n–kątów opisanych na danym okręgu, najmniejszy obwód ma n–kąt foremny.

150. Dowieść, że spośród n–kątów wpisanych w dany okrąg, największe pole ma n–kąt foremny.

151. Dowieść, że spośród n–kątów opisanych na danym okręgu, najmniejsze pole ma n–kąt foremny.