ZADANIA NA POCZĄTEK

1. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)\,.$$

2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\,.$$

3. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+\tfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\tfrac{1}{n(n+1)}=1-\tfrac{1}{n+1}\,.$$

4. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\tfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2(n+1)(n+2)}\,.$$

5. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\tfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\tfrac{1}{18}-\tfrac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}\,.$$

6. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\,.$$

7. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2\,.$$

8. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 2$ zachodzi wzór:
$$\big(1-\tfrac{1}{2^2}\big)\big(1-\tfrac{1}{3^2}\big)\cdot\ldots\cdot\big(1-\tfrac{1}{n^2}\big)=\tfrac{n+1}{2n}\,.$$

9. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$\tfrac{1}{5\cdot 8}+\tfrac{1}{8\cdot 11}+\tfrac{1}{11\cdot 14}+\cdots+\tfrac{1}{3n+2(3n+5)}=\tfrac{n}{3n+5}\,.$$

10. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>2$ i dla każdej liczby rzeczywistej $a>0$ zachodzi nierówność: $(1+a)^n>1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$.

11. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>2$ zachodzi nierówność:
$$2^{n(n-1)/2}>1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\,.$$

12. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ zachodzi nierówność:
$$(n+1)^n>2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n\,.$$

13. Udowodnić, że n prostych na płaszczyźnie, z których każde dwie mają punkt wspólny, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli tę płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ części.

14*. Niech $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$, itd., p_n jest n–tą liczbą pierwszą. Dowieść, że $p_n>3n$ dla $n\geq 12$.

15*. Na okręgu obrano $n>2$ punktów i każdy połączono odcinkiem każdym innym. Czy można wykreślić te odcinki jednym ciągiem tak, by koniec pierwszego był początkiem drugiego, koniec drugiego — początkiem trzeciego itd. i żeby przy tym koniec ostatniego odcinka był początkiem pierwszego.

16. Niech $\pi(n)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od liczby naturalnej n. Udowodnić, że $\pi(n)\leq\frac{n}{2}$ dla $n\geq 8$.

17! Załóżmy, że liczby x_1, $x_2,\ldots,x_n$ mają ten sam znak i $x_1>-1$, $x_2>-1,\ldots,x_n>-1$. Dowieść, że $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$. Wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.

18! Udowodnić, że jeśli suma liczb dodatnich jest równa n, to ich iloczyn jest nie jest większy niż 1.

19*. Udowodnić, ze szachownicę wymiaru $(4k+1)\times(4k+1)$ można obejść ruchem skoczka szachowego przechodząc dokładnie jeden raz przez każde pole.

20. Niech $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3,\ldots,$ $F_{n+2}==F_{n+1}+F_n$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $F_{n+2}\cdot F_n-F_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$.

21. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n liczba 1000^n-1 jest podzielna przez 37.

22. Udowodnić, że 7 jest dzielnikiem liczby $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

23. Udowodnić, że 13 jest dzielnikiem liczby $1000^n + (-1)^n$ dla każdej liczby naturalnej n.

24. Czy wśród liczb $1, 2, 3, \ldots, 10^n$ więcej jest tych, w których zapisie dziesiętnym występuje siódemka co najmniej raz, czy tych, które zapisujemy nie używając siódemki? Przeanalizować przypadki $n = 3$, $n = 6$, $n = 7$, $n = 10$.

25*. Wierzchołki n–kąta leżą na okręgu. Żaden punkt wewnętrzny koła nie leży na trzech przekątnych tego wielokąta. Na ile części dzielą te płaszczyznę wszystkie boki i przekątne tego wielokąta?

26. Wykazać, że $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

27. Wykazać, że $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$.

28. Wykazać, że $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + +3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$.

29. Wykazać, że $(a+b+c)^n = \sum \frac{n!}{k!\ell!m!} a^k b^\ell c^m$ przy czym sumowanie rozciąga się na takie wszystkie trójki nieujemnych liczb całkowitych, że $k + \ell + m = n$.

30. Udowodnić, że $\sum \frac{n!}{k!\ell!m!} = 3^n$ przy czym sumowanie rozciąga się na takie wszystkie trójki nieujemnych liczb całkowitych, że $k + \ell + m = n$.

31! Udowodnić, że $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \cdots = 0$.

32! Udowodnić, że $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$.

33! Udowodnić, że $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$.

34. Obliczyć $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\binom{n}{n-1} + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$.

35. Obliczyć $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - 4\binom{n}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}$

36. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ dla dowolnych $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

37! $|a| \leq c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-c \leq a \leq c$.

38! $|a + b| = |a| + |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geq 0$.

39. Jeśli $|a - b| \leq a$, to $ab \geq 0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

40. Jeśli $x + y + z = 1$, to $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

41. Jeśli $ab > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

42. $x^2 + x + 1 > 0$ i $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

43. $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

44! Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 1| < 7$?

45! Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 1| > 7$?

46. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 2| + |x - 6| = 8$?

47. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 2| + |x - 2| \leq 9$?

48. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left|\frac{x+1}{x+2}\right| > 1$?

49. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left|\frac{x-4}{x^2+x+5}\right| > 1$?

50! Niech $\max(a, b)$ oznacza większą z liczb a, b, $\min(a, b)$ — mniejszą z nich, $\max(a, a) = = a = \min(a, a)$. Dowieść, że $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$. Wyrazić podobnie $\min(a, b)$.

51. W każde z pól nieskończonej kraty kwadratowej wpisano liczbę naturalną w ten sposób, ze jeśli a, b, c, d są liczbami wpisanymi w pola przyległe do pola, na którym znalazła się liczba n, to $a + b + c + d \leq 4n$. Dowieść, że w każde pole wpisano tę samą liczbę naturalną. [1.1]

52! Niech $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że $a_n \geq 2^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$

53. Znaleźć wszystkie takie pary liczb całkowitych x, y, że zachodzi równość $xy = x + y$.

[1.1] Autorem tego zadania jest prof. dr hab. Maciej Skwarczyński.

54. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby $14^{14^{14}}$.
55. Ile zer ma na końcu liczba $1\,000\,000!$
56. W 1948 r wiek Andrzeja był równy cyfrze jedności w liczbie równej sumie cyfr roku jego urodzenia. Ile lat miał Andrzej w roku 1957?
57. Udowodnić, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $x > y \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ to $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} < \sqrt[n]{x-y}$.
58*. Udowodnić, że jeśli $n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$, to liczba $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ nie jest całkowita.
59*. Udowodnić, że jeśli $n \geq 3$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2-4}$ jest niewymierna.
60*. Udowodnić, że $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = 4$.
61. Udowodnić, że następujące liczby: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ są niewymierne.
62. Udowodnić, że jeśli $n \geq 2$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2+3n}$ jest niewymierna.
63. Znaleźć kresy górny i dolny zbioru A, jeśli $A =$:
(a) $\{\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}: \quad k, m, n \in \mathbb{N}\}$;
(b) $\left\{\frac{(m+n)^2}{2^{mn}}: \quad m, n \in \mathbb{N}\right\}$;
(c) $\left\{\frac{x}{x^2+1}: \quad x \in \mathbb{R}\right\}$;
(d) $\left\{\frac{1}{x^4+1}: \quad x \in \mathbb{R}\right\}$;
(e) $\left\{\frac{x^2+x+1}{3x^2+8}: \quad x \in \mathbb{R}\right\}$;
(f) $\left\{x^2 + (xy-1)^2: \quad x, y \in \mathbb{R}\right\}$.
64. Niech $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Udowodnić, że
(a) $f(x) > 0$ dla $x \geq 3$;
(b) $f(x) < 0$ dla $x \leq -1$;
(c) $|f(x) - f(y)| \leq 45|x-y|$ dla $x, y \in [-1, 3]$;
(d) istnieją takie liczby rzeczywiste $a < 0 < b < 2 < c$, że $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.
(e) Znaleźć maksymalne przedziały (półproste), na których funkcja f jest monotoniczna.
65. Udowodnić, że jeśli $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są niepustymi zbiorami, to
(a) $\sup\{a+b: \quad a \in A,\ b \in B\} = \sup A + \sup B$;
(b) $\inf\{a+b: \quad a \in A,\ b \in B\} = \inf A + \inf B$;
(c) $\sup\{a-b: \quad a \in A,\ b \in B\} = \sup A - \inf B$;
(d) $\inf\{a-b: \quad a \in A,\ b \in B\} = \inf A - \sup B$;
(d) $\inf\{a-b: \quad a \in A,\ b \in B\} = \inf A - \sup B$;
(e) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;
(f) $\sup\{a \cdot b: \quad a \in A,\ b \in B\} = \max(\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B)$.
66. Znaleźć $\sup\left\{x \cdot y: \quad x+y=4,\ x \in [0,4],\ y \in [0,4]\right\}$.
67. Znaleźć $\sup\left\{xyz: \quad x+y+z=6,\ x,y,z \in [0,6]\right\}$.
68*. Znaleźć kresy zbioru X zdefiniowanego za pomocą wzoru:
$$X = \left\{\frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} + \frac{a}{d+a+b}: \quad a, b, c, d > 0\right\}.$$
69. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli ta granica istnieje, gdy $a_n =$

a. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n+13}$;
b. $\frac{1+n+3n+n^2}{n^2-n+13}$;
c. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n^8+13}$;
d. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
e. $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$;
f. $\sqrt{1+2^{(-1)^n}}$;
g. $\sqrt[n]{1^k + 2^k + \cdots + n^k}$, $k \in \mathbb{N}$;
h. $\sqrt[n]{n}$;
i. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;
j. $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3-n+13}$;
k. $\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$;
l. $\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

m. $\frac{n}{2^n}$; **n.** $\frac{n^{13}}{2^n}$;

o. $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$, $|q|<1$; **p.** nq^n , $|q|<1$;

r. $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}$, $|q|<1$.

70. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona skończona.

71. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona równa 0.

72. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona równa 0.

73. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona skończona.

74. Niech $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... Wykazać, ze ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

75. Wykazać, że

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=1$; **b.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}\right)^n=1$;

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n=e^2$; **d.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2-n+1}\right)^n=e^2$.

76. Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=k$, dla $k\in\mathbb{N}$, to zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^n=e^k$.

77. Udowodnić, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

78. Wykazać, że jeśli ciąg (a_n) zawiera takie dwa podciągi $(a_{n'_k})$ i $(a_{n''_k})$ zbieżne do tej samej granicy g, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest wyrazem co najmniej jednego z tych dwóch podciągów, to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=g$.[1.2]

79*. Wyrazy ciągu a_n są nieujemne. Dla dowolnych liczb naturalnych m,n spełniona jest nierówność $a_{m+n}\le a_m+a_n$. Wykazać, że ciąg o wyrazie $\frac{a_n}{n}$ ma skończoną granicę.

80. Niech $a_1>0$ i $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

81. Niech $a_1=0$, $a_2=1$ i $a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$ dla każdego $n=1,2,3,\ldots$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i znaleźć ją.

82. Niech $a_0=9$, $a_1=27$ i $a_{n+2}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}a_{n+1}$ dla każdego $n=0,1,2,\ldots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) jest jest zbieżny. Jeśli ma granicę, znaleźć ją.

83. Niech c będzie liczbą dodatnią. Niech $a_1=\sqrt{c}$ i niech $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i znaleźć ją.

84. Niech a i b będą liczbami dodatnimi. Niech $a_1=b$ i niech $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)$. Wykazać, że istnieją takie liczby dodatnie c i $q\in(0,1)$, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $\left|a_n-\sqrt{a}\right|<cq^{2^n}$. Wskazać konkretną parę liczb c, q w przypadku $a=5$ i $b=3$.

Można wywnioskować stąd, że ciąg a_n jest bardzo szybko zbieżny do liczby $\sqrt{a}$, np. że liczba dokładnych cyfr liczby $\sqrt{a}$ przy zastąpieniu a_n przez a_{n+1} co najmniej podwaja się (dla dostatecznie dużych n, przy czym w przypadku $a=5$, $b=3$ jest tak nieomal od samego początku).

[1.2] Twierdzenie sformułowane w tym zadaniu autor tego tekstu lubi nazywać twierdzeniem o scalaniu.

85. Wykazać, że jeśli $g > 0$ jest liczbą niewymierną, $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = g$, to zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

86. Załóżmy, że ciąg (a_n) nie jest ograniczony z góry, ani z dołu oraz że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taki ściśle rosnący ciąg (n_m), że $x = \lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m}$, czyli: każda liczba rzeczywista x jest granicą pewnego podciągu ciągu (a_n).

87. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = g$. Podać przykład takiego ciągu (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$.

88. Dowieść, że jeśli zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to prawdziwy jest wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = g$. Podać przykład takiego ciągu liczb dodatnich (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n}$.

89. Dowieść, że jeśli zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to prawdziwy jest wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}} = g$. Podać przykład takiego ciągu liczb dodatnich (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots\frac{1}{b_n}}$.

90. Niech $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1}$, oraz $b_1 = 2$ i $b_{n+1} = \frac{2b_n+1}{b_n+1}$.
Udowodnić, że $\sup\{a_n\colon\ n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$.

91. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n}$.

92. Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$.

93. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

94. Niech $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\big(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor\big)$.

95*. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją takie całkowite liczby k, l, że $|kx + l| < \frac{1}{n}$.

96. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

97. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1}}{(k+1)n^k} = \frac{1}{2}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

98! Niech $a > 1$ będzie liczbą rzeczywistą, a ℓ — naturalną. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\ell}{a^n} = 0$.

99! Podać przykład takiego ciągu (a_n) o granicy $+\infty$, że równość $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0$ jest spełniona dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

100. Niech $a > b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Niech $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$. Niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ i $b_{n+1} = =\sqrt{a_n b_n}$ dla $n + 1, 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i to do wspólnej granicy.

101*. Dowieść, że każda liczba z przedziału $[0, 1]$ jest granicą pewnego podciągu ciągu o wyrazie $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2}\rfloor$.

102. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\sqrt[k]{1 + \frac{1}{n}} - 1\Big)$.

103*. Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

104. Dany jest taki ciąg (a_n), że z każdego jego podciągu (a_{n_m}) można wybrać podciąg, którego granicą jest g. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

105. Niech a i a_1 będą liczbami dodatnimi. Zdefiniujmy ciąg (a_n) indukcyjnie w następujący sposób : $a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + \frac{a}{a_n^2})$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ w zależności od a.

106. Niech x będzie liczbą dodatnią. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^n})$ w zależności od x .

107*. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$.

108! Dowieść, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ i obie granice są równe. Czy z istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ wynika istnienie granicy $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$?

109! Dowieść, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ i obie granice są równe.

110*. Niech $(a_{1,n})$, $(a_{2,n})$, $(a_{3,n})$, ... będą dowolnymi ograniczonymi ciągami liczb rzeczywistych. Udowodnić, że istnieje wtedy taki ściśle rosnący ciąg (n_m) liczb naturalnych, że wszystkie ciągi (a_{1,n_m}), (a_{2,n_m}), (a_{3,n_m}), ... są zbieżne — jest ich nieskończenie wiele!

111. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że wśród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 istnieje trójkąt o największym obwodzie. Można skorzystać z poprzedniego zadania.

112*. Dane są takie koła K_1, K_2, K_3, ..., że dla dowolnej liczby naturalnej n koła K_1, K_2, K_3, ..., K_n można tak umieścić w kwadracie Q, by ich wnętrza były parami rozłączne. Dowieść, że w kwadracie Q można tak umieścić wszystkie koła K_1, K_2, K_3, ..., by wnętrza każdej pary były rozłączne.

113. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich, który zawiera podciąg zbieżny do liczby 0. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele wskaźników n, dla których wyraz a_n jest mniejszy od wszystkich wyrazów, które go poprzedzają, tzn. istnieje nieskończenie wiele takich liczb k, że $a_k < a_j$ dla wszystkich numerów $j < k$.

114*. Załóżmy, że wyrazy niemalejącego ciągu (a_n) są dodatnie. Wykazać, że zbiór złożony z granic wszystkich podciągów ciągu $\left(\dfrac{a_n}{n+a_n}\right)$ jest przedziałem domkniętym.

115*. Niech (a_n) będzie ciągiem dodatnich liczb całkowitych. Definiujemy:

$$r_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots \cfrac{}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

Wykazać, że ciąg (r_n) jest zbieżny oraz że jego granica jest niewymierna.

116! Dowieść, że jeśli ciąg liczb całkowitych ma skończoną granicę, to prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

117! Znaleźć takie dwa ciągi (a_n) i (b_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

118! Znaleźć takie dwa ciągi (a_n) i (b_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

119! Znaleźć takie dwa ciągi (a_n) i (b_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

120! Znaleźć takie dwa ciągi (a_n) i (b_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= \frac{1}{7}$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

121! Znaleźć takie ciągi (a_n) i (b_n), że $\forall_n (a_n > 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= \frac{1}{7}$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

122. Niech $f(x) = x(1-x)$ dla $0 \le x \le 1$. Niech $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Udowodnić, że dla każdego $a \in [0,1]$ ciąg (a_n) ma granicę.

123. Niech $5 \le a_0$ i $a_{n+1} = a_n^2 - 10a_n + 30$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Znaleźć granicę ciągu (a_n) w zależności od a_0.

124. Niech $a_{n+1} = a_n^3 - 6a_n^2 + 12a_n - 6$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) ma granicę i znaleźć ją, jeśli istnieje. Wynik może zależeć od a_0.

125*. Niech $f(x) = 1 - |1 - 2x|$. Niech $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Dowieść, że istnieje taka liczba $a \in [0,1]$, że dla każdej liczby $x \in [0,1]$ istnieje podciąg ciągu (a_n), którego granicą jest liczba x.