Kolokwium trzecie — rozwiązania

1. Niech $f(x) = (x-4)^2 e^{-|x(x-4)|}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(i) Wyznaczyć wszystkie punkty $x \in \mathbb{R}$, w których funkcja f jest różniczkowalna.

(ii) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f i wyznaczyć $\inf\{f(x)\colon \quad x \in \mathbb{R}\}$ oraz $\sup\{f(x)\colon \quad x \in \mathbb{R}\}$.

(iii) Wyjaśnić, czy któryś z punktów $x_0 = 0$, $x_1 = 3$ jest punktem przegięcia funkcji f.

Rozwiązanie

Z definicji pochodnej wynika, że $f'(4) = \lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} (x-4)e^{-|x(x-4)|} = 0 \cdot 1 = 0$. Liczba 4 jest punktem różniczkowalności funkcji f, ten wzór uzyskamy później jeszcze raz.

Jeśli $0 \le x \le 4$, to $f(x) = (x-4)^2 e^{x(x-4)}$, bo wtedy $x(x-4) \le 0$. Stąd

$$f'(x) = \big[2(x-4)+(x-4)^2(2x-4)\big]e^{x(x-4)} = 2(x-4)(1+x^2-6x+8)e^{x(x-4)} = 2(x-4)(x-3)^2 e^{x(x-4)}.$$

W szczególności $f'_+(0) = -72$ i $f'_-(4) = 0$, ale druga równość jest mniej interesująca.

Jeśli $x \le 0$ lub $x \ge 4$, to $f(x) = (x-4)^2 e^{-x(x-4)}$, bo w tym przypadku $x(x-4) \ge 0$. Stąd wynika, że

$$f'(x) = \big[2(x-4) - (x-4)^2(2x-4)\big]e^{-x(x-4)} = 2(x-4)(1-x^2+6x-8)e^{-x(x-4)} =$$

$$= -2(x-4)(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})e^{-x(x-4)}.$$

W szczególności $f'_-(0) = 56 \ne -72 = f'_+(0)$, zatem w punkcie 0 jednostronne pochodne są różne, zatem w tym punkcie funkcja nie ma pochodnej, zatem nie jest w nim różniczkowalna. Jest to jedyny punkt nieróżniczkowalności tej funkcji.

Ponieważ $f'_-(0) > 0 > f'_+(0)$, więc w tym punkcie funkcja ma lokalne maksimum. Wynika to natychmiast z definicji pochodnej: istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $-\delta < x < 0$, to $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} > 0$, co oznacza, że licznik i mianownik tego ułamka mają ten sam znak, zatem $f(x) - f(0) < 0$. Analogicznie jeśli $0 < x < \delta$, to $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} < 0$, zatem ponieważ mianownik jest dodatni, to licznik jest ujemny, czyli $f(x) < f(0)$.

Mamy $f(4) = 0$ i $f(x) > 0$ dla $x \ne 4$, zatem $f(4) = 0$ jest **najmniejszą wartością funkcji** f (w szczególności f ma w tym punkcie minimum lokalne). Oczywiście $\inf\{f(x)\colon \quad x \in \mathbb{R}\} = f(4) = 0$.

Bez trudu stwierdzamy, że jeśli $x \in (-\infty, 0) \cup (4, 3+\sqrt{2})$, to $f'(x) > 0$, zatem funkcja (ciągła!) f jest ściśle rosnąca na każdym z przedziałów $(-\infty, 0]$, $[4, 3+\sqrt{2}]$. Jeśli $x \in (0,3) \cup (3,4) \cup (3+\sqrt{2}, \infty)$, to $f'(x) < 0$, zatem funkcja (ciągła!) f jest ściśle malejąca na każdym z przedziałów $[0,4]$, $[3+\sqrt{2})$, co dowodzi, że w punkcie $3+\sqrt{2}$ przyjmuje największą z wartości przyjmowanych w punktach półprostej $[4,\infty)$ (ma więc w nim lokalne maksimum). Oczywiście $f(3+\sqrt{2}) < (3+\sqrt{2}-4)^2 = (\sqrt{2}-1)^2 < 1 < 16$. Ciekawostka: $f(3+\sqrt{2}) \approx 0{,}028$.

Największą wartością funkcji f na półprostej $(-\infty, 4]$ jest liczba $f(0) = 16$. Wobec tego $f(0) = 16$ jest **największą wartością funkcji na całej prostej!** Mamy więc $\sup\{f(x)\colon \quad x \in \mathbb{R}\} = f(0) = 16$.

Ponieważ w punkcie $x = 0$ funkcja nie jest różniczkowalna, więc nie jest to punkt przegięcia funkcji.

Niech $g(x) = 2(x-4)e^{x(x-4)}$. Mamy więc $f'(x) = (x-3)^2 g(x)$ dla $x \in (0,4)$. Oczywiście $g(3) = -2e^{-3} < 0$. Dla $x \in (0,4)$ zachodzi równość $f''(x) = 2(x-3)g(x) + (x-3)^2 g'(x)$, zatem $f''(3) = 0$. Mamy też $f^{(3)}(x) = 2g(x) + 4(x-3)g'(x) + (x-3)^2 g''(x)$, zatem $f^{(3)}(3) = 2g(3) < 0$. Z twierdzenia o lokalnych ekstremach funkcji, która ma wiele pochodnych w jednym punkcie wynika, że 3 jest punktem przegięcia funkcji f (pierwsza pochodna ma w tym punkcie lokalne maksimum). ■

---

2. Niech $f(x) = \dfrac{x \cdot \ln x}{\sqrt{1+x}}$. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła

(a) na przedziale $(0,1)$, (b) na półprostej $[1,\infty)$.

Rozwiązanie

Dla $x > 0$ mamy

$$f'(x) = \tfrac{(x+2)\ln x + 2(x+1)}{2(1+x)^{3/2}} = \tfrac{(x+2)\ln\sqrt{x} + (x+1)}{(1+x)^{3/2}} \le \tfrac{(x+2)(\sqrt{x}-1)+(x+1)}{(1+x)^{3/2}} <$$
$$< \tfrac{2(x+1)(\sqrt{x}-1)+(x+1)}{(1+x)^{3/2}} = \tfrac{2(\sqrt{x}-1)+1}{(1+x)^{1/2}} < 2\,.$$

Dla $x \ge 0$ zachodzi też nierówność $f'(x) = \frac{(x+2)\ln x + 2(x+1)}{2(1+x)^{3/2}} \ge 0$, więc na półprostej $[1,\infty)$ funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stałą 2, zatem na tej półprostej jest jednostajnie ciągła.

Mamy $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 1\cdot 0 = 0$, co wynika z równości $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ uzyskanej już dawno temu na wykładzie. Zapominalscy mogli ewentualnie użyć reguły niesłusznie nazywanej imieniem pewnego markiza: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{H}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$. Z istnienia tej granicy wynika, że jeśli zdefiniujemy $f(0) = 0$, to otrzymamy funkcję ciągłą na półprostej $[0,\infty)$. Jest więc ona jednostajnie ciągła na przedziale $[0,1]$, jako ciągła na przedziale domkniętym, więc też jednostajnie ciągła na przedziale $(0,1) \subset [0,1]$. $\blacksquare$

---

3. Niech $a,b,c \in [0,1)$. Wykazać, że $\dfrac{1}{1-a} + \dfrac{1}{1-b} + \dfrac{1}{1-c} \ge \dfrac{3}{1-\sqrt[3]{abc}}$.

Rozwiązanie

Niech $f(x) = \frac{1}{1-x}$ dla $x \in [0,1)$. Prawdziwe są wzory $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$ i $f''(x) = \frac{1}{(1-x)^3} > 0$, zatem funkcja f jest ściśle rosnąca i ściśle wypukła. Możemy więc skorzystać z nierówności Jensena:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-a}\right) = \frac{1}{3}\big(f(a)+f(b)+f(c)\big) \ge f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{1}{1-\frac{a+b+c}{3}} \ge \frac{1}{1-\sqrt[3]{abc}}$$

— ostatnia nierówność wynika z tego, że $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ i z tego, że f jest funkcją ściśle rosnącą.

Uwaga: Można zastąpić funkcję $\frac{1}{1-x}$ funkcją $\frac{1}{1-e^x}$ rozpatrywaną na półprostej $(-\infty,0)$, co pozwoli na niekorzystanie z nierówności o średnich, ale zmusi nas do oddzielnego zatroszczenia się o argument 0. $\blacksquare$

---

4. Asymptotą funkcji $f\colon (c,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ przy $x \longrightarrow \infty$ nazywamy taką prostą o równaniu $y = ax+b$, że

$$\lim_{x\to\infty} \big[f(x) - (ax+b)\big] = 0\,.$$

Niech $f(x) = \sqrt{4\cdot x^p \cdot e^{(x^{-2})} + 3\cdot x}$ dla $x > 0$. Wykazać, że istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista p, dla której funkcja f ma asymptotę przy $x \longrightarrow +\infty$. Napisać równanie tej asymptoty.

Rozwiązanie

Z równości $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - (ax+b)\big] = 0$ wynika, że $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(ax+b)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a\right]$, wobec czego $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^{p-2}\cdot e^{(x^{-2})} + \frac{3}{x}}$. Mamy $\lim\limits_{x\to\infty} e^{(x^{-2})} = 1$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$, zatem jeśli $p > 2$, to $a = \infty$, jeśli $p = 2$, to $a = 2$, jeśli $p < 2$, to $a = 0$. Wobec tego jeśli $p > 2$, to funkcja f nie ma asymptoty przy $x \longrightarrow \infty$. Znajdziemy granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2\cdot e^{(x^{-2})} + 3x} - 2x\right)$. Mamy $e^{(x^{-2})} = 1 + \frac{1}{x^2} + O(\frac{1}{x^4})$ przy $x \longrightarrow \infty$, bo $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ i $e^h = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots$, więc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1-h}{h^2} = \frac{1}{2}$, co pozwala zastosować ostatnią równość dla $h = \frac{1}{x^2}$. By uwolnić się od pierwiastka skorzystamy z równości $\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z + O(z^2)$ wynikajacej natychmiast z wzoru dwumianowego Newtona. Mamy $\sqrt{4x^2\cdot e^{(x^{-2})} + 3x} - 2x = \sqrt{4x^2\cdot[1 + \frac{1}{x^2} + O(\frac{1}{x^4})] + 3x} - 2x = 2x\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + O(\frac{1}{x^4}) + \frac{3}{4x}} - 1\right] =$

$=2x\left[\sqrt{1+\frac{3}{4x}+O(\frac{1}{x^2})}-1\right] = 2x\left[1+\frac{3}{8x}+O(\frac{1}{x^2})-1\right] = \frac{3}{4}+2xO(\frac{1}{x^2})\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{3}{4}$, z czego wynika, że w tym przypadku asymptotą jest prosta $y=2x+\frac{3}{4}$. Jeśli $p<2$, to musiałaby być spełniona równość $a=0$. Wtedy mielibyśmy $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^{p-2}\cdot e^{(x^{-2})}+3x}-0\cdot x\right)=\infty$, co wyklucza istnienie asymptoty w tym przypadku.

Uwaga.

Użycie symbolu O nie jest konieczne. Pokażemy jak można obliczyć potrzebną granicę nieco inaczej.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2\cdot e^{(x^{-2})}+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2\cdot e^{(x^{-2})}+3x-4x^2}{\sqrt{4x^2\cdot e^{(x^{-2})}+3x}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2\cdot(e^{(x^{-2})}-1)+3x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2\cdot e^{(x^{-2})}+3x}+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[4x\cdot(e^{(x^{-2})}-1)+3\right]\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4\cdot e^{(x^{-2})}+3/x}+2}=$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\left[4t\cdot\frac{e^{t^2}-1}{t^2}+3\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{4\cdot 1+0}+2}=[4\cdot 0\cdot 1+3]\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Oczywiście osoby, które nie mogą żyć bez twierdzenia Bernoulli'ego zwanego regułą de l'Hospitala, mogą je też zastosować ... ■