Drugie kolokwium, 13 stycznia 2006

Poniższy tekst został napisany przez dr Agnieszkę Kałamajską i ocenzurowany przez właściciela strony (oczywiście bez akceptacji Autorki), na której wisi. Wynika z tego, że cenzor jest odpowiedzialny za wszystkie błędy.

Zadanie 1 Dla jakich $a \in \mathbf{R}$ szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4a^2-4a)^n}{n-8\sqrt{n}+1} \cdot \cos\frac{n\pi}{3}$$

jest zbieżny, a dla jakich jest rozbieżny. Dla jakich $a \in \mathbf{R}$ szereg ten jest zbieżny bezwzględnie?

Rozwiązanie. *Badamy najpierw bezwzględną zbieżność. Zauważmy, że dla dowolnego* $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{2} \leq |\cos\frac{n\pi}{3}| \leq 1. \tag{1}$$

Zatem dla

$$a_n := \frac{(4a^2-4a)^n}{n-8\sqrt{n}+1} \cdot \cos\frac{n\pi}{3}$$

spełnione jest oszacowanie

$$\frac{1}{2}\frac{|4a^2-4a|^n}{n} \leq |a_n| \leq |4a^2-4a|^n \quad \text{dla} \quad n = 64, 65, \ldots$$

To daje:

(a) jeśli $|4a^2-4a| < 1$ *to szereg jest bezwzględnie zbieżny (więc również warunkowo) na mocy kryterium porównawczego,*

(b) jeśli $|4a^2-4a| > 1$ *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{|4a^2-4a|^n}{n} = \infty$*, więc wyraz ogólny szeregu nie zbiega do zera i szereg jest rozbieżny.*

Zajmijmy się najpierw sytuacją (a). Rozwiązujemy nierówność:

$$-1 < 4a(a-1) < 1.$$

Nierówność $-1 < 4a(a-1)$ *jest równoważna warunkowi* $(2a-1)^2 > 0$*, co jest spełnione dla każdego* $a \neq \frac{1}{2}$.

Nierówność $4a(a-1) < 1$ *jest równoważna nierówności* $4a^2-4a-1 < 0$*, co jest spełnione dla* $a \in (a_1, a_2)$, $a_1 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$*. Zatem wnioskujemy, że*

$$\text{dla } a \in \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \text{ szereg jest zbieżny warunkowo i bezwzględnie.} \tag{2}$$

Podobnie analizując nieróność $|4a(a-1)| > 1$ *wnioskujemy na podstawie obserwacji (b), że*

$$\text{dla } a \in \Big(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\Big) \cup \Big(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\Big) \text{ szereg jest rozbieżny.} \tag{3}$$

Pozostaje przeanalizować następujące przypadki:
(c) $a = \frac{1}{2}$,
(d) $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$,
(e) $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
W przypadku (c) mamy $4a(a-1) = -1$, *zatem*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - 8\sqrt{n} + 1} \cdot \cos\frac{n\pi}{3}.$$

Zacznijmy od zbieżności bezwzględnej. Z oszacowania (1) wynika, że dla $c_n = \frac{(-1)^n}{n-8\sqrt{n}+1} \cdot \cos\frac{n\pi}{3}$ *mamy*

$$\frac{1}{2n} < |c_n|.$$

Ponieważ szereg harmoniczny $\sum_n \frac{1}{n}$ *jest rozbieżny, zatem szereg* S *jest rozbieżny bezwzględnie na mocy kryterium porównawczego. Zbadamy teraz zbieżność warunkową.*
Dla $n = 6k+1, 6k+2, \ldots, 6k+6$ *ciąg* $\cos\frac{n\pi}{3}$ *przyjmuje kolejno wartości:*

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1.$$

Zatem ciąg $(-1)^n \cos\frac{n\pi}{3}$ *przyjmuje kolejno wartości*

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1.$$

Zapiszmy $c_n = d_n b_n$ *gdzie* $d_n = \frac{1}{n-8\sqrt{n}+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-8)+1}$ *monotonicznie zbiega do zera od* $n = 64$ *natomiast szereg o wyrazie* $b_n = (-1)^n \cos\frac{n\pi}{3}$ *ma ograniczone sumy częściowe (kolejne sumy częściowe to* $-\frac{1}{2}$, -1, 0, $-\frac{1}{2}$, -1, 0 *itd.). Stąd na mocy warunku Dirichleta:*

$$\text{dla } a = \frac{1}{2} \text{ szereg jest zbieżny warunkowo, ale nie bezwzględnie.} \tag{4}$$

W pozostałych przypadkach rozumujemy analogicznie, co daje:

$$\text{dla } a \in \Big\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\Big\} \text{ szereg jest zbieżny warunkowo.} \tag{5}$$

Odpowiedź na postawione pytanie została sformułowana w punktach (2), (3), (4), (5).

Zadanie 2 Ciąg liczb zespolonych $\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ spełnia następujące warunki:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \sqrt{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n^2) = 1, \quad \mathrm{In}(z_n^3) > 0.$$

Wykazać że istnieje $\lim_{n\to\infty} z_n$ i znaleźć tę granicę.

Rozwiązanie. *Niech* $z_n = a_n + ib_n$ *gdzie* $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$, $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$. *Wiemy z założenia, że* $a_n \to \sqrt{2}$ *gdy* $n \to \infty$. *Ponadto:*

$$\mathrm{Re}(z_n^2) = \mathrm{Re}(a_n^2 - b_n^2 + 2ia_nb_n) = a_n^2 - b_n^2 \to 1 \text{ gdy } n \to \infty.$$

Zatem $\lim_n b_n^2 = 1$. *Mamy*

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(z_n^3) &= \mathrm{Im}((a_n + ib_n)^3) = \mathrm{Im}(a_n^3 + (ib_n)^3 \\ &+ 3a_n^2 ib_n - 3a_nb_n^2) = -ib_n^3 + 3a_n^2 b_n = b_n((-b_n^2 + 3a_n^2)) = b_n\alpha_n > 0 \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_n = (-b_n^2 + 3a_n^2) \to 5$ *gdy* $n \to \infty$. *Liczba* α_n *jest dodatnia dla prawie wszystkich* n , *więc również* b_n *musi być dodatnie dla dużych* n. *Skoro* $b_n^2 \to 1$ *i* $b_n > 0$ *dla prawie wszystkich* n *to dla* $n > N$ *dla pewnego* N *mamy* $b_n = \sqrt{b_n^2} \to 1$. *Dlatego* $\lim_{n\to\infty} z_n = \sqrt{2} + i$.

Zadanie 3 Dane są funkcje $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i $g : \mathbf{R} \to (0, \infty)$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ spełniona jest nierówność $|f(x) - f(y)| \leq g(x - y)$ oraz $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t} = 0$.
Wykazać, że funkcja f jest stała.

Rozwiązanie. *Mamy dla każdego* $x \in \mathbf{R}$

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq \frac{g(h)}{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Stąd wynika, że funkcja f *jest różniczkowalna na całej prostej i* $f'(x) = 0$ *dla każdego* x. *Z twierdzenia Lagrange'a wynika, że dla dowolnego* $x \in \mathbf{R}$ *istnieje liczba* θ *leżąca między* 0 *i* x *taka, że*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\theta).$$

Ponieważ $f' \equiv 0$, *więc* $f'(\theta) = 0$ *i* $f(x) = f(0)$, *zatem* f *jest funkcją stałą.*

Zadanie 4 Niech dla $x > 0$ funkcja f zdefiniowana będzie wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{-x} + \sqrt{x}e^{-x}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x}\right).$$

(i) Znaleźć granicę $\lim_{x\to 0+} f(x)$ oraz $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

(ii) Wykazać, że dla pewnej liczby $x \in (0, \infty)$ zachodzi wzór $f(x) = 1$.

Rozwiązanie. *(i): Mamy:*

$$\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{3}.$$

Zatem z ciągłości funkcji $\operatorname{tg} x$ *wynika, że*

$$h(x) := \operatorname{tg}\left(\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x}\right) \overset{x\to 0^+}{\to} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Dla $x > 0$ definiujemy

$$g(x) = \frac{1 - e^{-x} + \sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{x}} = \frac{1 - e^{-x}}{-x}\frac{-x}{\sqrt{x}} + e^{-x} = -\frac{e^{-x} - 1}{-x}(-\sqrt{x}) + e^{-x}.$$

Wiadomo też (wykład, ćwiczenia), że $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{-x} = 1$ *oraz oczywiście* $\lim_{x\to 0}(-\sqrt{x}) = 0$, $\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$. *Stąd*

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1, \text{ oraz } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{g(x)} = 1.$$

Ponieważ $f(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot h(x)$, *mamy*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x\to 0^+} h(x) = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Liczymy teraz granicę f w nieskończoności. Mamy

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x} + \sqrt{x}e^{-x}} \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x}}(\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x}) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x),$$

gdzie

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{1 - e^{-x} + \sqrt{x}e^{-x}}, \\ f_2(x) &= \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x}}, \\ f_3(x) &= \sqrt{x}(\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x}). \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ *oraz* $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0$ *(wykład, ćwiczenia). Stąd wynika, że*

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = 1.$$

Niech

$$k(x) = \sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x} = \frac{\frac{\pi^2}{9}}{\sqrt{x + \frac{\pi^2}{9}} + \sqrt{x}}.$$

Widzimy, że

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = 0.$$

Ponieważ

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}\frac{1}{\cos y} = 1,$$

więc

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{tg}(k(x))}{k(x)} = 1.$$

Natomiast

$$f_3(x) = \frac{\frac{\pi^2}{9}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{x}} + 1} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi^2}{18}.$$

Ostatecznie:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f_1(x) \cdot \lim_{x\to\infty} f_2(x) \cdot \lim_{x\to\infty} f_3(x) = \frac{\pi^2}{18}.$$

(ii): Funkcja $\operatorname{tg}\left(\sqrt{x+\frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x}\right)$ *jest ciągła w przedziale* $(0,\infty)$ *jako złożenie funkcji ciągłych, gdyż*

$$0 < \sqrt{x+\frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{x} = \frac{\frac{\pi^2}{9}}{\sqrt{x+\frac{\pi^2}{9}} + \sqrt{x}} < \frac{\frac{\pi^2}{9}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}.$$

Funkcja $\frac{\sqrt{x}}{1-e^{-x}+\sqrt{x}e^{-x}}$ *jest również ciągła jako iloraz funkcji ciągłych. Zatem funkcja* f *jest ciągła. Jej granicami w końcach przedziału określoności są:* $\sqrt{3} > 1$ *oraz* $\frac{\pi^2}{18} < 1$. *Zatem istnieją liczby* $x_1, x_2 \in (0,\infty)$ *takie, że* $f(x_1) > 1$ *i* $f(x_2) < 1$. *Z własności Darboux wynika, że* f *przyjmie każdą zartość pośrednią pomiędzy liczbami* $f(x_1)$ *i* $f(x_2)$, *w szczególności przyjmie również wartość* 1.

Zadanie 5 Załóżmy, że funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz że dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c, dla których $a \neq b$, zachodzą równości $b = f(a)$, $c = f(b)$ i $a = f(c)$. Udowodnij, że istnieją różne liczby u, v takie, że $v = f(u)$ i $u = f(v)$.

Rozwiązanie. *Jeśli* $b = c$, *to również* $c = f(b) = f(c) = a$, *więc* $b = c = a$, *wbrew założeniu. Wobec tego* $b \neq c$. *Analogicznie dowodzimy, że* $a \neq c$. *Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że najmniejszym elementem zbioru* $\{a, b, c\}$ *jest liczba* a. *Możliwe są więc dwa przypadki:* $a < b < c$ *lub* $a < c < b$.
Załóżmy, że $a < b < c$. *Mamy* $f \circ f(a) - a = f(f(a)) - a = f(b) - a = c - a > 0$ *i* $f \circ f(b) - b = f(f(b)) - b = f(c) - b = a - b < 0$. *Funkcja* $f \circ f$ *jest ciągła. Przysługuje jej własność Darboux. Istnieje zatem punkt* $\overline{x} \in (a, b)$ *taki, że* $f \circ f(\overline{x}) = f(f(\bar{x})) = \overline{x}$. *Niech* u *będzie największą z liczb* y *takich, że*

$$y \in (a,b), \quad f \circ f(y) = y. \tag{6}$$

Z ciągłości funkcji $f \circ f$ *i tego, że* $f \circ f(b) = a \neq b$ *wynika, że takie* y *istnieje (jest nim kres górny zbioru złożonego, z liczb* y *opisanych wyżej). Niech* $v = f(u)$. *Wykażemy, że*

$$v = f(u) \neq u. \tag{7}$$

Załóżmy, że $f(u) = u$. *Ponieważ* $f(u) = u < b < c = f(b)$, *więc istnieje to* $x_1 \in [y, b]$ *takie, że* $f(x_1) = b$ *(funkcja ciągła* f *ma własność Darboux). Wtedy:*

$$f \circ f(x_1) - x_1 = f(b) - x_1 = c - x_1 > 0.$$

i $f \circ f(b) - b = f(f(b)) - b = f(c) - b = a - b < 0$. *Wobec tego istnieje* $x_2 \in (x_1, b)$ *takie, że* $f \circ f(x_2) - x_2 = 0$, *co jest niemożliwe, bo wtedy* x_2 *spełnia (6) i jest większe od* u, *wbrew temu, że* u *jest największą liczbą, która ten warunek spełnia. Udowodniliśmy (7), czyli wykazaliśmy, że liczby* u *i* $v = f(u)$ *spełniają warunek zadania.*

Załóżmy teraz, że $a < c < b$. *Niech* $g(x) = -f(-x)$. *Mamy* $-b < -c < -a$ *i* $g(-b) = -f(b) = -c$, $g(-c) = -f(c) = -a$ *oraz* $g(-a) = -f(a) = -b$. *Z już udowodnionej części tezy wynika, że istnieje punkt* u_1 *taki, że* $v_1 = g(u_1) \neq u_1$ *i* $g(v_1) = g(g(u_1)) = u_1$. *Niech* $u = -u_1$, $v = -v_1$. *Oczywi"scie* $u \neq v$. *Mamy również*
$f(u) = f(-u_1) = -g(u_1) = -v_1 = v$ *i* $f(v) = f(-v_1) = -g(v_1) = -u_1 = u$, *a to oznacza, że również w tym przypadku teza zachodzi.*
Uwaga: Oczywiście wprowadzenie pomocniczej funkcji g *nie jest konieczne. Zamiast tego można rozważyć drugi przypadek w taki sam sposób w jaki rozważyliśmy pierwszy.*