Szeregi Fouriera

W całym tekście f oznacza funkcję całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[-\pi,\pi]$,
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ dla $n=0,1,2,\ldots$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$ dla $n=1,2,\ldots$,
$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx + b_j\sin jx)$.

Dla dwu funkcji f,g całkowalnych w sensie Riemanna na przedziale $[-\pi,\pi]$ można rozważyć $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. Myśleć o tej całce należy jako o iloczynie skalarnym funkcji f i g, będziemy ją też oznaczać symbolem $(f|g)$, bo przypomina to iloczyn skalarny dwóch wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^k$: $(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_kw_k$. Różnica polega na tym, że wektor można/należy traktować jako funkcję k zmiennych, każdemu numerowi j współrzędnej przypisujemy współrzędną x_j. W przypadku funkcji określonej na przedziale możemy potraktować jej wartość w punkcie x jako współrzędną o numerze x. Tych współrzędnych jest nieprzeliczalnie wiele, więc standardowe metody sumowania nie mogą być zastosowane. Obliczamy więc całkę z iloczynu funkcji, co można potraktować jako operację nieprzeliczalnego sumowania składników typu $f(x)g(x)$ zamiast składników typu v_jw_j. Jeśli wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, … $\mathbf{e}_k$ są wzajemnie prostopadłe, niekoniecznie jednostkowe, to $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k}\frac{(\mathbf{v}|\mathbf{e}_j)}{(\mathbf{e}_j|\mathbf{e}_j)}\mathbf{e}_j$. Wykażemy, że funkcje 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, …są wzajemnie prostopadłe w rozumieniu opisanego iloczynu skalarnego oraz, że jest ich dostatecznie wiele, co oznacza, że każda inna w miarę porządna, np. całkowalna funkcja okresowa będzie mogła być przedstawiona jako ich kombinacja liniowa, oczywiście nieskończenie wielu, czyli w postaci pewnego szeregu zbieżnego. Jasne jest, że zbiór funkcji całkowalnych w sensie Riemanna jest przestrzenią liniową wymiaru kontinuum, co sugeruje, że tyle powinno być elementów bazy. Okaże się jednak, że wystarczy ich mniej – przeliczalnie wiele, dzięki temu, że dopuścimy sumy nieskończenie wiele składników. Rolę wektorów bazowych (zamiast $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_k$) pełnić będą funkcje 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, …Wykażemy niebawem, że są one wzajemnie prostopadłe (często stosowany termin – ortogonalne) w sensie opisanego iloczynu skalarnego oraz że jest dostatecznie wiele, dokładniej wykażemy, że każdą funkcję ciągłą okresową można przybliżyć skończoną kombinacją liniową wypisanych funkcji. Funkcje postaci $\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$ nazywane są wielomianami trygonometrycznymi, jeśli $a_n \neq 0$ lub $b_n \neq 0$, to mówimy o wielomianie trygonometrycznym stopnia n. Inaczej mówiąc: każda funkcja ciągła okresowa jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów trygonometrycznych (tw. Weierstrassa). Będziemy mieć do czynienia z trzema rodzajami zbieżności: zbieżnością punktową (lub punktową prawie wszędzie), zbieżnością jednostajną oraz zbieżnością w L^2, co oznaczać będzie, że ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\|f_n - f\|_2^2 := \int_{-\pi}^{\pi}\left|f_n(x) - f(x)\right|^2 dx \longrightarrow 0$.

Ponieważ iloczyn funkcji całkowalnych w sensie Riemanna jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna, więc a_n i b_n są dobrze określone. Wobec tego s_n też jest dobrze zdefiniowane. s_n jest n–tą sumą częściową pewnego szeregu, który nazywamy szeregiem Fouriera funkcji f. Wykażemy, że szereg ten jest zbieżny do funkcji f „średniokwadratowo”, tzn. że $\int_{-\pi}^{\pi}|f(t) - s_n(t)|^2\,dt \to 0$, gdy $n \to \infty$.

Wskażemy też warunki wystarczające dla zbieżności szeregu Fouriera w pewnych punktach do funkcji f. Wykażemy, że w przypadku funkcji klasy C^1 szereg Fouriera jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie do funkcji f. Niestety w przypadku funkcji ciągłych nie da się zbyt wiele powiedzieć na temat zbieżności szeregu. Wykazano mianowicie, że szereg Fouriera funkcji ciągłej $2\pi-$okresowej jest do niej zbieżny punktowo *poza* pewnym zbiorem miary 0 (tw. Carlesona 1966) oraz że dla każdego zbioru C miary 0 istnieje funkcja ciągła, której szereg Fouriera jest zbieżny do niej w tych i tylko tych punktach, które nie są elementami zbioru C (Kahane, Katznelson 1966). Te dwa ostatnie twierdzenia wykraczają daleko poza program AMI i są trudne. Wykażemy natomiast znacznie łatwiejsze twierdzenie: szereg Fouriera funkcji ciągłej jest do niej jednostajnie zbieżny w sensie Cesàro, tj. że ciąg $\left(\frac{1}{n}(s_0+s_1+\ldots+s_{n-1})\right)$ jest zbieżny jednostajnie do f (tw Fejéra). Zaczniemy od przypomnienia kilku wzorów trygonometrycznych, które przydadzą się później:

(1) $\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,

(2) $\quad 2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$,

(3) $\quad 2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$,

(4) $\quad 2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$,

(5) $\quad \dfrac{1}{2}+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$,

(6) $\quad \sin\alpha+\sin3\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha=\dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$.

Cztery pierwsze są dobrze znane np. ze szkoły, dwa ostatnie łatwo wynikają z poprzednich. Z tych wzorów łatwo wnioskujemy, że $\cos jx\cos jt+\sin jx\sin jt=\cos j(x-t)$ dla $j=1,2,\ldots,n$ oraz $\dfrac{1}{2}+\cos(x-t)+\cos2(x-t)+\cdots+\cos n(x-t)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(x-t)\right)}{2\sin\frac{(x-t)}{2}}$. Z otrzymanego wzoru wynika, że

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{D}$$

– wymaga to przedłużenia funkcji f na $\mathbb{R}$ do funkcji $2\pi-$okresowej (zmieniając w razie potrzeby jej wartość w punkcie π), zmiany zmiennej w całce ($s=x-t$) i powrotu do całkowania na przedziale $[-\pi,\pi]$ korzystającego z tego, że całka z funkcji o okresie 2π jest niezależna od tego, po którym z przedziałów długości 2π całkujemy.

Z wzorów (D) i (6) wynika, że

$$\frac{1}{n}(s_0+s_1+\cdots+s_{n-1})=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \tag{F}$$

Wzory (D) i (F) mają sens dla dowolnej funkcji całkowalnej f, ułamki z licznymi sinusami tylko pozornie są nieokreślone w punkcie 0, oba mają granice w tym punkcie: $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}=\dfrac{2n+1}{2}$ oraz

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2n\sin^2 \frac{t}{2}} = \dfrac{n}{2}$. W szczególności wzory te mają sens dla funkcji tożsamościowo równej 1 na $\mathbb{R}$. Zachodzą oczywiste równości: $b_n = b_n(1) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\,dt = 0$, $a_n = a_n(1) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\,dt = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $a_0 = a_0(1) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dt = 2$. Wobec tego $1 = s_n = s_n(1) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$ dla $n = 0, 1, \ldots$ i $1 = \dfrac{1}{n}(s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}) = \dfrac{1}{n}(s_0(1) + s_1(1) + \cdots + s_{n-1}(1)) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$. Możemy otrzymane wzory pomnożyć przez dowolną liczbę, np. przez $f(x)$, f znów oznacza dowolną funkcję całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[-\pi,\pi]$. Mamy więc $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\dfrac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$ oraz $f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$ Możemy więc napisać, że

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{D1}$$

$$\frac{1}{n}\Big(s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)\Big) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \tag{F1}$$

Udowodnimy teraz

Twierdzenie Fejéra

Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i 2π–okresowa, to $\dfrac{1}{n}\Big(s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}\Big) \rightrightarrows f$.

Dowód.

Jeśli f jest ciągła na $\mathbb{R}$, to jest ciągła na przedziale $[-2\pi, 2\pi]$, więc jest na nim jednostajnie ciągła, zatem jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje $\delta \in (0,1)$ taka, że $x_1, x_2 \in [-2\pi, 2\pi]$ i $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Ale stąd wynika, że $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, bowiem można przesunąć punkty x_1, x_2 o całkowitą wielokrotność liczby 2π tak, aby po przesunięciu znalazły się one oba w przedziale $[-2\pi, 2\pi]$, ze względu na okresowość przesunięcie obu argumentów o 2π nie zmienia przyporządkowanych im wartości funkcji, więc różnica $|f(x_1) - f(x_2)|$ zachowuje swą wartość, pozostaje więc mniejsza niż ε. Wykazaliśmy zatem, że funkcja f jest jednostajnie ciągła na całej prostej. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\delta \in (0,1)$ będzie taką liczbą, że $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Niech M będzie taką liczbą, że $|f(x)| \le M$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Mamy

$$\left|\frac{1}{n}\Big(s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)\Big) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x-t) - f(x)\Big)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \Big(f(x-t) - f(x)\Big)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \Big(f(x-t) - f(x)\Big)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right| +$$

$$+ \left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Big(f(x-t) - f(x)\Big)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} 2M\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} 2\varepsilon\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} 2M\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \le$$

$$\leq \frac{M}{n\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt + \frac{2\varepsilon}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt + \frac{M}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ponieważ w ostatnim wyrażeniu nie ma zmiennej x, więc zakończyliśmy dowód zbieżności jednostajnej ciągu $\left(\frac{1}{n}\big(s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}\big)\right)$ do funkcji f. ■

Wniosek z dowodu twierdzenie Fejéra

(i) Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie x, to $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n_1}(x)] = f(x)$.

(ii) Jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału $[\alpha,\beta]$, to $\frac{1}{n}\big(s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}\big) \rightrightarrows f$ na przedziale $[\alpha,\beta]$. ■

W konsekwencji, jeśli szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny w punkcie ciągłości funkcji f, to jego sumą jest wartość funkcji w tym punkcie. Natomiast wypada podkreślić, że na temat ewentualnej zbieżności szeregu Fouriera w punktach ciągłości funkcji na razie się nie wypowiadamy.

Teraz wykażemy bardzo ważny, choć w pewnym sensie zupełnie oczywisty

Lemat Riemanna

Jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna, to $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$.

Dowód.

Załóżmy najpierw, że funkcja f jest klasy C^1. Mamy wtedy $\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{n}\cos(nx)f(x)\Big|_a^b +$
$+\int_a^b \frac{1}{n}\cos(nx)f'(x)\,dx = \frac{1}{n}\big(f(a)\cos(na)-f(b)\cos(nb)\big) + \frac{1}{n}\int_a^b\cos(nx)f'(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, bo zachodzi nierówność $\left|\int_a^b\cos(nx)f'(x)\,dx\right| \leq \int_a^b\big|f'(x)\big|\,dx$. W ten sposób wykazaliśmy prawdziwość lematu Riemanna dla funkcji, które mają ciągłą pochodną.

Teraz założymy, że f jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ a $\varepsilon>0$ liczbą rzeczywistą. Na mocy twierdzenia o przybliżaniu funkcji całkowalnych ciągłymi istnieje funkcja ciągła g taka, że $\int_a^b\big|f(x)-g(x)\big|\,dx<\varepsilon$, a na mocy twierdzenia Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami istnieje wielomian w taki, że dla każdego $x\in[a,b]$ zachodzi $|g(x)-w(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.
Wobec tego zachodzi nierówność

$$\int_a^b\big|f(x)-w(x)\big|\,dx \leq \int_a^b\big|f(x)-g(x)\big|\,dx + \int_a^b\big|g(x)-w(x)\big|\,dx < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = 2\varepsilon.$$

Dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\left|\int_a^b w(x)\sin(nx)\,dx\right| < \varepsilon$ – wielomian jest oczywiście funkcją klasy C^1 a nawet C^∞. Wobec tego dla dostatecznie dużych n mamy

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b\big(f(x)-w(x)\big)\sin(nx)\,dx\right| + \left|\int_a^b w(x)\sin(nx)\,dx\right| \leq$$
$$\leq \int_a^b\big|f(x)-w(x)\big|\big|\sin(nx)\big|\,dx + \left|\int_a^b w(x)\sin(nx)\,dx\right| \leq$$
$$\leq \int_a^b\big|f(x)-w(x)\big|\,dx + \left|\int_a^b w(x)\sin(nx)\,dx\right| < 2\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon$$

W ten sposób wykazaliśmy lemat. ■

Uwaga uogólniająca lemat Riemanna.

Dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ całkowalnej na przedziale $[a,b]$ zachodzi $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0$ oraz $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0$. ■

Z lematu Riemanna i wzorów na współczynniki Fouriera funkcji całkowalnej wynika od razu

Wniosek o granicy współczynników Fouriera funkcji całkowalnej

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(f) = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(f) = 0$. ■

Twierdzenie Dini'ego

Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie 2π, całkowalną na przedziale $[0,2\pi]$ i dla pewnego x funkcja przypisująca liczbie t iloraz $\dfrac{2f(x)-f(x-t)-f(x+t)}{t}$ również jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[-\pi,\pi]$, to $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$, czyli

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \big(a_1\cos x + b_1 \sin x\big) + \big(a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x)\big) + \big((a_3\cos(3x) + b_3\sin(3x)\big) + \cdots$$

Dowód.

Skorzystamy z wzoru (D1): $\quad s_n(x) - f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$. Wynika z niego od razu, że

$$\begin{aligned} s_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)-2f(x)}{t}\,\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt. \end{aligned}$$

Funkcja przypisująca liczbie t liczbę $\dfrac{f(x-t)+f(x+t)-2f(x)}{t}\cdot\dfrac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[0,\pi]$ jako iloczyn funkcji całkowalnych w sensie Riemanna (funkcja $\dfrac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$ jest ciągła na przedziale **domkniętym** $[0,\pi]$). Stąd wynika i z lematu Riemanna wynika, że

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \big(f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt &= \\ = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)-2f(x)}{t}\,\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt &= 0. \end{aligned}$$

Dowód został zakończony. ■

Z dowodu twierdzenia Dini'ego wynika, że jeśli liczbą $2f(x)$ zastąpimy przez jakąś inną liczbę A taką, że funkcja przypisująca liczbie t liczbę $\dfrac{A-f(x-t)-f(x+t)}{t}$ będzie całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[-\pi,\pi]$, to otrzymamy wzór

$$A = \frac{a_0}{2} + \big(a_1\cos x + b_1 \sin x\big) + \big(a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x)\big) + \big((a_3\cos(3x) + b_3\sin(3x)\big) + \cdots \tag{D2}$$

Ważnym przykładem są funkcje, które w pewnych punktach mają obie jednostronne granice: $f(x_+) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(x+t)$ oraz $f(x_-) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(x-t)$. Jeśli dodatkowo obie granice jednostronne

$f'(x_+) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(x+t)-f(x_+)}{t}$ oraz $f'(x_-) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(x-t)-f(x_+)}{-t}$ istnieją i są *skończone*, to jest spełniony warunek Dini'ego z tym, że zamiast liczby $2f(x)$ wpisujemy tam liczbę $f(x_-)+f(x_+)$. Otrzymujemy więc wzór

$$\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \big(a_1\cos x + b_1 \sin x\big) + \big(a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x)\big) + \cdots \tag{D3}$$

Stwierdzenie to jest w zasadzie zupełnie oczywiste: z założenia wynika, że funkcja zmiennej t, przy ustalonym x, $\dfrac{f(x-t)+f(x+t)-f(x_+)-f(x_-)}{t}$ jest ciągła poza zbiorem miary 0, bo f ma tę własność. Trzeba więc jedynie wykazać jej ograniczoność. Jest ona ograniczona na przedziałach postaci $(-\delta,\delta)$ w przypadku dostatecznie małych liczb dodatnich δ, bo ten iloraz ma skończoną granicę $f'(x_+)+f'(x_-)$ w punkcie 0. Na przedziałach $[-\pi,-\delta]$ oraz $[\delta,\pi]$ iloraz jest ograniczony, bo ma ograniczony licznik i mianownik oddzielony od 0 (tzn. $|t|\geq\delta$). Założenie to w szczególności jest spełnione w przypadku funkcji różniczkowalnych.

Zasada lokalizacji

Jeśli funkcje f,g pokrywają się na przedziale (α,β), to dla każdego $x\in(\alpha,\beta)$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}[s_{n,f}(x)-s_{n,g}(x)] = 0$. ■

Ta zasada wynika od razu z twierdzenia Diniego zastosowanego do funkcji $f-g$ — dla niej założenia są spełnione w sposób oczywisty! Wynika z tej zasady, że zbieżność szeregu Fouriera funkcji jest zależna tylko od zachowania funkcji na przedziale (krótkim, chociaż wartości współczynników zależą przecież rónież od zachowania się funkcji poza $[\alpha,\beta]$. Można zasadę lokalizacji wzmocnić dowodząc, że ciąg $\big(s_{n,f}(x)-s_{n,g}(x)\big)$ jest na przedziale (α,β) zbieżny do 0 *niemal jednostajnie*.

Wykażemy teraz jeszcze, że dla dowolnej funkcji okresowej $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ całkowalnej na przedziale $[-\pi,\pi]$ zachodzi równość Parsevala (przez Rosjan zwana równością Lapunowa)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \pi\Big(\frac{a_0^2}{2}+a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+a_3^2+b_3^2+\cdots\Big) = \pi\Big(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\Big)$$

Dowód równości Parsevala

Oznaczmy $\sin(jx)$ przez $\sigma_j(x)$ dla $j=1,2,\ldots$, $\cos(jx)$ – przez $\kappa_j(x)$ dla $j=0,1,2,\ldots$. Przypomnijmy, że jeśli g i h są funkcjami całkowalnymi na przedziale $[-\pi,\pi]$, to $(g|h) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)\,dx$ oraz $\|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx}$

Zacznijmy od stwierdzenia, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą równości

$$\|\kappa_0\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dt = 2\pi, \qquad \|\kappa_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nt)\,dt = \pi, \qquad \|\sigma_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)\,dt = \pi, \tag{N}$$

a dla dowolnych liczb naturalnych $m\neq n$

$$(\kappa_m|\kappa_n) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)\cos(nt)\,dt = 0,$$

$$(\kappa_m|\sigma_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\sin(nt)\,dt = 0, \qquad \text{(ORT)}$$

$$(\sigma_m|\sigma_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Oznaczają one, że w przestrzeni funkcji całkowalnych funkcje 1, $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$, $\sin 2t$, ... są wzajemnie prostopadłe (ortogonalne) – równości (ORT) oraz, że ich normy (długości, jeśli myślimy o nich jak o wektorach) są równe $\sqrt{2\pi}$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi}$, ... – równości (N) *. Równości te uzyskujemy stosując wzory (**1**), (**2**) i (**3**) i licząc bardzo proste całki. **

Załóżmy, że $1 \le j \le n$, $n \ge 1$. Mamy wtedy

$$(f - s_n|\kappa_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - s_n(x)\Big)\,dx = \pi a_0 - \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = 0\,,$$

$$(f - s_n|\kappa_j) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - s_n(x)\Big)\cos(jx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\cos(jx)\,dx = a_j - a_j = 0\,,$$

$$(f - s_n|\sigma_j) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - s_n(x)\Big)\sin(jx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\sin(jx)\,dx = b_j - b_j = 0\,.$$

Oznacza to, że funkcja $f - s_n$ jest prostopadła do podprzestrzeni liniowej rozpiętej przez funkcje κ_0, σ_1, κ_1,..., σ_n, κ_n, czyli że funkcja s_n jest rzutem funkcji f na tę podprzestrzeń. Mamy więc

$$\|f\|_2^2 = \|(f - s_n) + s_n\|_2^2 = \|(f - s_n)\|_2^2 + \big(f - s_n|s_n\big) + \big(s_n|f - s_n\big) + \|s_n\|_2^2 = \|(f - s_n)\|_2^2 + \|s_n\|_2^2\,.$$

Wystarczy więc udowodnić, że $\|(f - s_n)\|_2^2 \longrightarrow 0$, bowiem $\|s_n\|_2^2 = \pi\Big(\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2\Big)$. Jeśli funkcja g jest elementem podprzestrzeni rozpiętej przez funkcje κ_0, σ_1, κ_1,..., σ_n, κ_n, czyli gdy jest ona ich kombinacją liniową, tzn. istnieją liczby $c_0, c_1, \ldots, c_n$, $d_1, d_2, \ldots, d_n$ takie, że dla każdego $x \in [-\pi,\pi]$ zachodzi równość $g(x) = c_0 + \sum_{j=0}^{n}\big(c_j\cos(jx) + d_j\sin(jx)\big)$, czyli $g = c_0\kappa_0 + \sum_{j=1}^{n}\big(c_j\kappa_j + d_j\sigma_j\big)$, to $\|f - g\|_2^2 = \|(f - s_n) + (s_n - g)\|_2^2 = \|(f - s_n)\|_2^2 + (f - s_n|s_n - g) + (s_n - g|f - s_n) + \|s_n - g\|_2^2 =$

$$= \|(f - s_n)\|_2^2 + \|s_n - g\|_2^2 \ge \|(f - s_n)\|_2^2$$

Właściwie to nic mądrego w tej nierówności nie ma: ze wszystkich punktów przestrzeni rozpiętej przez funkcje κ_0, σ_1, κ_1,..., σ_n, κ_n najbliższym funkcji f jest jej rzut prostopadły na tę podprzestrzeń. W przestrzeni tej znajduje się funkcja $\frac{1}{n}\big(s_0 + s_1 + \cdots + s_n\big)$.

Jeśli f jest ciągła, to na mocy twierdzenia Fejéra $\frac{1}{n}\big(s_0 + s_1 + \cdots + s_n\big) \rightrightarrows f$, zatem również $\|\frac{1}{n}\big(s_0 + s_1 + \cdots + s_n\big) - f\|_2^2 \longrightarrow 0$, a ponieważ $\|f - s_n\|_2 \le \|f - \frac{1}{n}\big(s_0 + s_1 + \cdots + s_n\big)\|_2$, więc również $\|f - s_n\|_2 \longrightarrow 0$. Oznacza to, że teza zachodzi w przypadku funkcji ciągłej f.

Jeśli f nie jest funkcja ciągłą, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła f_ε taka, że $\inf f \le \inf f_\varepsilon \le \sup f_\varepsilon \le \sup f$ i $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon$. Jest oczywiste, że prawdziwy jest wzór

---

* myślimy tu o normie pochodzącej od wspomnianego wcześniej iloczynu skalarnego $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$

** Równość Parsevala oznacza po prostu, że kwadrat normy funkcji można obliczać zgodnie z uogólnionym twierdzeniem Pitagorasa, dokładniej: zapisujemy funkcję f jako nieskończoną kombinację liniową wzajemnie prostopadłych (ortogonalnych) funkcji 1, $\cos t$, $\cos 2t$, $\sin t$, $\sin 2t$, ... i mnożymy ją skalarnie przez siebie.

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_\varepsilon(x)|^2\,dx=0$ (bez wspólnej ograniczoności funkcji f_ε wzór ten przestaje być prawdziwy). Stąd wynika, że dla każdej funkcji całkowalnej f i dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje funkcja ciągła $\tilde f$ taka, że $\left\|f-\tilde f\right\|_2<\varepsilon$. Dla dostatecznie dużych n zachodzi $\|\tilde f-s_n(\tilde f)\|_2<\varepsilon$, bo funkcja $\tilde f$ jest ciągła. Mamy więc $\|f-s_n(f)\|_2\le\|f-s_n(\tilde f)\|_2\le\|f-\tilde f\|_2+\|\tilde f-s_n(\tilde f)\|_2<2\varepsilon$. Stąd już wynika, że $\|f-s_n(f)\|_2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Kończy to dowód równości Parsevala. ■

Z niej natychmiast wynika nierówność Bessela;

$$\|f\|_2^2\ge\pi\Big(\frac{a_0^2}{2}+a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+a_3^2+b_3^2+\cdots\Big)=\pi\Big(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\Big)\,, \tag{NBes}$$

którą zresztą "po drodze" wykazaliśmy dowodząc, że $\|f\|_2^2=\|f-s_n(f)\|_2^2+\|s_n(f)\|_2^2\ge\|s_n(f)\|_2^2$.

Jak wiadomo pochodna funkcji określonej na przedziale nie musi być całkowalna w sensie Riemanna. Załóżmy jednak, że funkcja 2π–okresowa f ma pochodną w każdym punkcie oraz że f' jest całkowalna w sensie Riemanna. Można więc funkcję f', pochodną funkcji f rozwijać w szereg Fouriera. Dla każdego $n=1,2,\ldots$ zachodzą wtedy równości:

$$a_n(f')=nb_n(f)\qquad\text{oraz}\qquad b_n(f')=-na_n(f) \tag{FF$'$}$$

Wzory te są natychmiastową konsekwencją definicji współczynników Fouriera funkcji f i funkcji f' oraz wzoru na całkowanie przez części:

$$b_n(f')=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\bigg(f(x)\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx\bigg)=-na_n(f)$$

–ostatnia równość wynika z tego, że zarówno funkcja f jak i funkcja $\sin$ są 2π–okresowe.

Twierdzenie o zbieżności jednostajnej szeregu Fouriera

Szereg Fouriera 2π–okresowej, różniczkowalnej funkcji f, której pochodna f' jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[-\pi,\pi]$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.

Dowód.

Dla $n\ge 1$ mamy bowiem $a_n(f)=-\dfrac{b_n(f')}{n}$ i $b_n(f)=\dfrac{a_n(f')}{n}$. Mamy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f)|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{b_n(f')}{n}\right|\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n(f')|^2}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\cdot\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n(f)|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n(f')}{n}\right|\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f')|^2}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\cdot\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx}$$

Teza wynika natychmiast z kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego. ■

Z twierdzenia tego wynika, że im więcej pochodnych ma funkcja okresowa, tym „szybciej" jej szereg Fouriera jest zbieżny. Zauważmy też, że chociaż szeregi Fouriera funkcji, których pochodna jest w miarę porządna (całkowalna w sensie Riemanna) można różniczkować wyraz po wyrazie, to dowód tego stwierdzenia nie był oparty o definicję pochodnej lecz opierał się na wzorze na całkowanie przez części. To zupełniej inaczej niż w przypadku szeregów potęgowych!!! Podkreślić wypada, że w postaci szeregu potęgowego można przedstawiać jedynie funkcje klasy C^∞, natomiast w postaci szeregu Fouriera – funkcje całkowalne w sensie Riemanna, a można tę klasę poszerzyć, w większości twierdzeń omawianych w tej części można zastąpić całkowalność w sensie Riemanna istnieniem całki skończonej niewłaściwej, lub skończonej całki niewłaściwej z wartości bezwzględnej funkcji, w istocie rzeczy całkowalnością w sensie Lebesgue'a, o którą będziemy zajmować się w przyszłym roku akademickim.

Na deser podamy rozwinięcia w szeregi Fouriera dwu funkcji.

Przykład

a $f(x) = |x|$ dla $-\pi \le x \le \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$, więc $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, tzn. $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

b. Różniczkując formalnie funkcję z przykładu **a** i uzupełniając jej wartości w punktach, w których pochodnej dwustronnej nie ma średnimi arytmetycznymi granic jednostronnych pochodnej otrzymujemy funkcję g zdefiniowaną wzorami:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } 0 < x < \pi; \\ 0, & \text{gdy gdy } x \in \{-\pi, 0, \pi\}; \\ -1, & \text{gdy } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Jej rozwinięcie w szereg Fouriera otrzymać można różniczkując rozwinięcie funkcji z przykładu **a**:

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin(2n+1)x$$

Podstawiając do tego wzoru $x = \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy szereg Leibniza $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Proszę dokładnie uzasadnić dlaczego wolno postąpić w przykładzie **b** w ten sposób!

Przykłady tego rodzaju można mnożyć, ale nie będziemy tego teraz czynić.

Zadania i ćwiczenia

1. Znaleźć sumę $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2. Wykazać, że nie istnieje ciąg wielomianów (w_n) o współczynnikach zespolonych jednostajnie zbieżny do funkcji $\bar{z}$ na okręgu jednostkowym $\{z \in \mathbb{C}\colon \quad |z| = 1\}$.

3. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest 2π–okresowa, całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[-\pi,\pi]$ i spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[\alpha,\beta] \subseteq [-\pi,\pi]$, to jej szereg Fouriera jest jednostajnie zbieżny do niej na przedziale $[\alpha,\beta]$.

4. Znaleźć szeregi Fouriera następujących funkcji 2π–okresowych zdefiniowanych poniżej:

- **a.** $f(x) = x$, gdy $|x| < \pi$, $f(\pi) = 0$,
- **b.** $f(x) = x^2$, gdy $|x| \le \pi$,
- **c.** $f(x) = |\sin kx|$, gdy $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$,
- **d.** $f(x) = \cos ax$, gdy $x \in \mathbb{R}$, $f(\pi) = 0$, $a \notin \mathbb{Z}$,
- **e.** $f(x) = \sin ax$, gdy $x \in \mathbb{R}$, $f(\pi) = 0$, $a \notin \mathbb{Z}$.

5. Niech $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją 2π–okresową, całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[-\pi, \pi]$. Wykazać, że jeśli $f(x + a\pi) = f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$, to f jest funkcją stałą prawie wszędzie, tzn. istnieje zbiór C miary 0 taki, że jeśli $x_1, x_2 \notin C$, to $f(x_1) = f(x_2)$.

6. Niech $d_{k,n}$ oznacza liczbę tych $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dla których pierwszą cyfrą potęgi 2^j jest liczba $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Np. $d_{2,9} = 2$, $d_{8,15} = 2$, $d_{2,15} = 3$. Wykazać, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $d_{7,n} > d_{8,n}$.