Dwa zadania, w których występuje sumowanie lub szacowanie sum szeregów

Szereg Leibniza i „obliczanie" π

Zajmiemy się najpierw szeregiem Leibniza (wg książki Wacława Sierpińskiego „Działania nieskończone" z 1923 r)

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots .$$

Jak powszechnie (przynajmniej w budynku MIM) wiadomo

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} .$$

Z własności szeregu Leibniza wynika od razu, że

$$\left|\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+5}-\frac{1}{2k+7}+\cdots$$

Mamy

$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+5}-\frac{1}{2k+7}+\frac{1}{2k+9}-\frac{1}{2k+11}+\cdots=\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{2}{(2k+5)(2k+7)}+\frac{2}{(2k+9)(2k+11)}+\cdots>$
$>\frac{2}{(2k+1)(2k+5)}+\frac{2}{(2k+5)(2k+9)}+\frac{2}{(2k+9)(2k+13)}+\cdots=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+5}+\frac{1}{2k+5}-\frac{1}{2k+9}+\frac{1}{2k+9}-\frac{1}{2k+13}+\cdots\Big]=$
$=\frac{1}{2(2k+1)}>\frac{1}{4(k+1)} .$

Mamy również

$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+5}-\frac{1}{2k+7}+\frac{1}{2k+9}-\frac{1}{2k+11}+\cdots=\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{2}{(2k+5)(2k+7)}+\frac{2}{(2k+9)(2k+11)}+\cdots=$
$=\frac{2}{4k^2+8k+3}+\frac{2}{4(k+2)^2+8(k+2)+3}+\frac{2}{4(k+4)^2+8(k+4)+3}+\cdots<\frac{2}{4k^2+8k}+\frac{2}{4(k+2)^2+8(k+2)}+\frac{2}{4(k+4)^2+8(k+4)}+$
$+\cdots=\frac{2}{4k(k+2)}+\frac{2}{4(k+2)(k+4)}+\frac{2}{4(k+4)(k+6)}+\cdots=\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}+\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+6}+\cdots\Big]=\frac{1}{4k} .$

Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi nierówność

$$\frac{1}{4(k+1)}<\left|\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|<\frac{1}{4k} .$$

Jest to nierówność, której dowód był naszym chwilowym celem. Wynika z niej np. że jeśli ktoś chciałby znaleźć m cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π, to musiałby zsumować 10^m wyrazów szeregu Leibniza, co nie jest pomysłem dobrym ... ■

Zmiana kolejności sumowania w szeregu anharmonicznym

Zajmiemy się szeregiem $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$. Wiadomo, że jest on zbieżny. Mamy

$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\big(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\big)+\big(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\big)+\cdots=$
$=\big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\big)+\big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\big)+\cdots=$
$=\big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\big)+\big(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\big)+\cdots=$
$=\big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\big)+\big(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\big)+\cdots+\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\big)+\big(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\big)+\cdots=$
$=\big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\big)+\big(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\big)+\cdots+\frac{1}{2}\Big[\big(1-\frac{1}{2}\big)+\big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\big)+\cdots\Big]=$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\Big] =$
$= \frac{3}{2}\big[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\big]$. Znaleźliśmy więc sumę szeregu za pomocą przekształceń w miarę prostych korzystając z tego, że jest on zbieżny, że szereg harmoniczny jest zbieżny, że można w szeregu zbieżnym „dostawiać nawiasy" w dowolny sposób.

Teraz potraktujemy ten szereg jako wartość szeregu potęgowego w punkcie 1. W tym celu rozważymy szereg potęgowy $x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{6}x^{12} + \cdots$. Ponieważ szereg $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$ jest zbieżny, więc promień zbieżności rozpatrywanego szeregu potęgowego nie jest mniejszy niż 1. Dla $x \in (-1,1)$ mamy
$\big[x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{6}x^{12} + \cdots\big]' =$
$= 1 + x^2 - 2x^3 + x^4 + x^6 - 2x^7 + x^8 + x^{10} - 2x^{11} + \cdots = \big[1 + x^2 - 2x^3\big]\big[1 + x^4 + x^8 + \cdots\big] =$
$= \big[1 + x^2 - 2x^3\big] \cdot \frac{1}{1-x^4}$.
Stąd wynika, że istnieje liczba C taka, że jeśli $x \in (-1,1)$, to
$x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{6}x^{12} + \cdots = C + \int \frac{1+x^2-2x^3}{1-x^4}\,dx =$
$= C + \int \big[\frac{1}{1-x^2} - \frac{2x^3}{1-x^4}\big]\,dx = C + \frac{1}{2}\int \big[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{4x^3}{1-x^4}\big]\,dx = C + \frac{1}{2}\big[-\ln(1-x) + \ln(1+x) + \ln(1-x^4)\big] =$
$= C + \frac{1}{2}\ln\big[\frac{(1+x)(1-x^4)}{1-x}\big] = C + \frac{1}{2}\ln[(1+x)(1+x+x^2+x^3)]$.
Równość ta zachodzi m.in. dla $x = 0$. Stąd wynika, że $C = 0$. Z twierdzenia o ciągłości szeregu potęgowego i z tego, że otrzymana w końcówce funkcja jest ciągła w każdym punkcie półprostej $(-1,-\infty)$, więc w szczególności w punkcie 1, wnioskujemy, że

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{2}\ln[(1+1)(1+1+1+1)] = \frac{1}{2}\ln 8 = \frac{3}{2}\ln 2,$$

więc tą metodą też zdołaliśmy zsumować ten szereg. ■