

## Funkcja $\Gamma$ Eulera

Niech  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ . Ta całka jest zbieżna dla każdej liczby  $x > 0$ . Mamy bowiem  $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt < \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_0^1 = \frac{1}{x}$ , więc całka po przedziale  $[0, 1]$  jest skończona nawet wtedy, gdy funkcja podcałkowa nie jest ograniczona. Mamy też  $\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt < \infty$ , bo dla każdej liczby naturalnej  $n > x - 1$  zachodzi nierówność  $t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{(n+2)! t^{x-1}}{t^{n+2}} \leq \frac{(n+2)!}{t^2}$ , zatem  $\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \leq (n+2)! \int_1^\infty t^{-2} dt = (n+2)!$ . Wobec tego dla  $x > 0$   $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \in (0, \infty)$ .

Mamy  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{\text{całkujemy}}{\text{przez części}} \frac{1}{x} t^x e^{-t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$ . Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej  $x$  zachodzi równość  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Wziąwszy pod uwagę oczywistą równość  $\Gamma(1) = 1$  otrzymujemy kolejno  $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$ ,  $\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2$ ,  $\dots$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$  dla każdej liczby naturalnej  $n > 0$ . Zdefiniowaliśmy więc funkcję, której wartości w punktach naturalnych są równe  $(n-1)!$ , ale która jest zdefiniowana dla wszystkich liczb dodatnich. Takich funkcji można zdefiniować nieskończenie wiele różnymi wzorami. Zachęcam Państwa do zrobienia tego tak, by otrzymać funkcję klasy  $C^\infty$  na  $(0, \infty)$ , każdy powinien przynajmniej ze dwie takie funkcje zdefiniować dla własnej **satysfakcji**.

Udowodnimy, że jeśli nałożymy na funkcję naturalne warunki, to nie będzie wyboru.

### Twierdzenie H.Bohra\*

Istnieje dokładnie jedna funkcja  $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  taka, że  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  dla każdego  $x > 0$ ,  $\ln \Gamma$  jest funkcją wypukłą.

Dowód poprzedzimy kilkoma lematami. Będziemy mówić *funkcja logarytmicznie wypukła* zamiast *logarytm funkcji jest funkcją wypukłą*.

### Lemat o sumie funkcji logarytmicznie wypukłych

Suma funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą. Zakładamy dodatkowo, że jeśli któryś koniec dziedziny jest jej elementem, to funkcja jest w nim ciągła, ciągłość wewnątrz dziedziny wynika z wypukłości.

### Dowód.

Załóżmy, że funkcje  $f$  i  $g$  są logarytmicznie wypukłe na przedziale  $I$ . Oznacza to, że dla dowolnych  $x, y \in I$  zachodzą nierówności  $\ln f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}[\ln f(x) + \ln f(y)]$  i  $\ln g(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}[\ln g(x) + \ln g(y)]$ , czyli  $f(\frac{x+y}{2}) \leq \sqrt{f(x)f(y)}$  i  $g(\frac{x+y}{2}) \leq \sqrt{g(x)g(y)}$ . Udowodnimy, że

$$f(\frac{x+y}{2}) + g(\frac{x+y}{2}) \leq \sqrt{(f(x) + g(x))(f(y) + g(y))}.$$

Z logarytmicznej wypukłości funkcji  $f, g$  i z nierówności Schwarz'a wynika, że

$$\begin{aligned} f(\frac{x+y}{2}) + g(\frac{x+y}{2}) &\leq \sqrt{f(x)f(y)} + \sqrt{g(x)g(y)} = \sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + \sqrt{g(x)}\sqrt{g(y)} \leq \\ &\leq \sqrt{[\sqrt{f(x)}]^2 + [\sqrt{g(x)}]^2} \cdot \sqrt{[\sqrt{f(y)}]^2 + [\sqrt{g(y)}]^2} = \sqrt{(f(x) + g(x))(f(y) + g(y))}. \end{aligned}$$

Otrzyaliśmy nierówność równoważną logarytmicznej wypukłości funkcji  $f+g$ , o której wiemy, że jest ciągła, zatem wystarczy sprawdzać warunek Jensena wyłącznie, gdy wagi są równe  $\frac{1}{2}$ . ■

\* Młodszy brat Nielsa Bohra, jedyny znany matematyk, który zdobył medal olimpijski, srebrny w 1908 r, piłka nożna, reprezentacja Danii.

### Lemat o logarytmicznej wypukłości granicy

Jeśli  $f_n \rightarrow f$  i wszystkie funkcje  $f_1, f_2, \dots$  są logarytmicznie wypukłe, to funkcja  $f$  też jest logarytmicznie wypukła.

#### Dowód.

Jeśli  $0 \leq \alpha \leq 1$ , to dla każdej liczby naturalnej  $n$  i dowolnych  $x, y \in I$  zachodzi nierówność  $\ln f_n(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \ln f_n(x) + (1 - \alpha) \ln f_n(y)$ . Stąd i z ciągłości logarytmu wynika nierówność  $\ln f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \ln f(x) + (1 - \alpha) \ln f(y)$ , a to oznacza, że funkcja graniczna  $f$  jest logarytmicznie wypukła. ■

### Lemat o logarytmicznej wypukłości całki

Jeśli  $0 < a < A$ , to funkcja, która przypisuje liczbie  $x$  liczbę  $\int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$  jest logarytmicznie wypukła

#### Dowód.

Niech  $f_n(x) = \frac{A-a}{n} \sum_{j=1}^n \left(a + \frac{j}{n}(A-a)\right)^{x-1} e^{-a-j(A-a)/n}$ . Ponieważ  $f_n(x)$  to suma Riemanna całki  $\int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A-a}{n} = 0$ , więc  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$ . Wystarczy więc udowodnić, że funkcja  $f_n$  jest logarytmicznie wypukła. Dla każdego  $j$  funkcja  $x \rightarrow \left(a + \frac{j}{n}(A-a)\right)^{x-1} e^{-a-j(A-a)/n}$  jest logarytmicznie wypukła, bo jej logarytm jest funkcją zwaną dawniej liniową, a dziś afiniczną. Ponieważ suma funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła, więc  $f_n$  jest logarytmicznie wypukła. ■

### Lemat o logarytmicznej wypukłości całki niewłaściwej

Funkcja przypisująca liczbie  $x > 0$  liczbę  $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  jest logarytmicznie wypukła.

#### Dowód.

Niech  $(a_n)$  będzie ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do 0, zaś  $(A_n)$  ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do  $\infty$  i niech  $a_n < A_n$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Mamy więc  $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{A_n} t^{x-1} e^{-t} dt$ , zatem teza lematu wynika z lematu o logarytmicznej wypukłości granicy. ■

Z udowodnionych lematów wynika od razu, że funkcja  $x \rightarrow \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  spełnia warunki wymienione w twierdzeniu H.Bohra.

#### Dowód twierdzenia H.Bohra

Niech  $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  będzie funkcją taką, że  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  dla każdego  $x > 0$ ,  $\ln \Gamma$  jest funkcją wypukłą i niech  $g(x) = \ln \Gamma(x)$ . Spełnione są więc warunki

- (i)  $g(1) = 0$ ,
- (ii)  $g(x+1) - g(x) = \ln x$ ,
- (iii)  $\ln g$  jest funkcją wypukłą.

Niech  $x \in (0, 1)$  i niech  $n > 1$  będzie liczbą naturalną. Ponieważ iloraz różnicowy funkcji wypukłej

jest funkcją niemalejącą każdego swego argumentu z osobna, więc zachodzi nierówność:

$$g(n) - g(n-1) = \frac{g(n-1) - g(n)}{n-1-n} \leq \frac{g(n+x) - g(n)}{n+x-n} \leq \frac{g(n+1) - g(n)}{n+1-n} = g(n+1) - g(n),$$

zatem

$$x \ln(n-1) = x[g(n) - g(n-1)] \leq g(n+x) - g(n) \leq x[g(n+1) - g(n)] = x \ln n.$$

Mamy też

$$\begin{aligned} g(n+x) - g(x) &= g(n+x) - g(n-1+x) + g(n-1+x) - g(n-2+x) + \dots + g(x+1) - g(x) = \\ &= \ln(n-1+x) + \ln(n-2+x) + \dots + \ln(1+x) + \ln x. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$g(n) = g(n) - g(n-1) + g(n-1) - g(n-2) + \dots + g(2) - g(1) = \ln(n-1) + \ln(n-2) + \dots + \ln 1.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} g(x+n) - g(n) &= g(x) + \ln(n-1+x) + \ln(n-2+x) + \dots + \ln(1+x) + \ln x - \\ &\quad - [\ln(n-1) + \ln(n-2) + \dots + \ln 1] = g(x) + \ln x + \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right). \end{aligned}$$

Możemy też napisać  $\ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n-2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right)$  oraz  $\ln(n-1) = \sum_{j=1}^{n-2} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right)$ . To pozwala napisać podwójną nierówność, w której funkcja  $g$  wystąpi już tylko jeden raz:

$$-\ln x - \sum_{j=1}^{n-2} \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right) + x \sum_{j=1}^{n-2} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) \leq g(x) \leq -\ln x - \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right) + x \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right).$$

Jeśli  $0 < y < 1$ , to  $\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}4y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \dots$ . Z tej równości wynika, że dla każdego  $j \geq 2$  zachodzi nierówność

$$-\frac{x}{2j^2} = \left[\frac{x}{j} - \frac{x}{2j^2}\right] - \frac{x}{j} \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right) \leq \frac{x}{j} - \left[\frac{x}{j} - \frac{x^2}{2j^2}\right] = \frac{x^2}{2j^2}. *$$

Z tej nierówności wynika, że szereg  $\sum_{j=1}^{\infty} [x \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right)]$  jest bezwzględnie zbieżny. Na przedziale  $[0, 1]$  zbieżność jest jednostajna. Wobec tego zachodzi równość

$$g(x) = -\ln x + \sum_{j=1}^{\infty} [x \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right)].$$

Okazało się, że funkcja  $g$  **musi** być zdefiniowana konkretnym wzorem. Ta uwaga kończy dowód twierdzenia Bohra. ■

### Wzór Gaussa

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(1+x)(2+x) \dots (n-1+x)} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \cdot \frac{n!}{(x+1)(x+2) \dots (x+n)}.$$

Wzór ten wynika od razu z oszacowań funkcji  $g$  i z równości

$$\begin{aligned} \exp\left[-\ln x - \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right) + x \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right)\right] &= \frac{1}{x} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^x \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \frac{j}{j+x} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot n^x \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)(2+x) \dots (n-1+x)}. \end{aligned}$$

---

\* W rzeczywistości możemy wyrażenie  $x \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right)$  nieco lepiej oszacować z góry: ta funkcja zmiennej  $x$  jest ściśle wypukła jako różnica funkcji liniowej i ściśle wklęsłej, przyjmuje w punktach 0 i 1 wartość 0, zatem na przedziale  $(0, 1)$  jest ujemna. Mamy więc  $-\frac{x}{2j^2} \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right) \leq 0$ .

### Wzór Weierstrassa

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} e^{x/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1},$$

gdzie  $\gamma$  oznacza stałą Eulera, tzn.

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \ln(1+1) + \frac{1}{2} - \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \exp[g(x)] = \exp\left\{-\ln x + \sum_{j=1}^{\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right)\right]\right\} = \\ &= \exp\left\{-\ln x + \sum_{j=1}^{\infty} x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j}\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{x}{j} - \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right)\right]\right\} = \exp\left\{-\ln x - \gamma x + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{x}{j} - \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right)\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot e^{-\gamma x} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} e^{x/j} \left(1 + \frac{x}{j}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dowód wzoru Weierstrassa został zakończony w przypadku  $0 < x \leq 1$ . Otrzymany iloczyn nieskończony jest zbieżny jednostajnie w każdym zwartym podzbiórze  $K$  płaszczyzny, który nie zawiera ani jednej liczby całkowitej niedodatniej (dodatnie nam nie przeszkadzają, dla ujemnych nie wszystkie wyrazy iloczynu nieskończonego są zdefiniowane, więc o zbieżności w ogóle mówić się nie da). Jednostajna zbieżność iloczynu wynika z tego, że dla dostatecznie dużych  $n$  i wszystkich  $x \in K$  zachodzi nierówność  $\left|\frac{x}{n}\right| < \frac{1}{2}$ , więc logarytm liczby  $1 + \frac{x}{n}$  jest dobrze określony i możemy korzystać z rozwinięcia  $\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots$ . Te same komentarze dotyczą wzoru Gaussa. Z obu wzorów Gaussa i Weierstrassa wynika, że  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  dla każdej liczby  $z \in \mathbb{C}$  z wyjątkiem  $z = 0, -1, -2, \dots$ . Wobec tego oba wzory określają tę samą funkcję. Dla  $x > 0$  mamy więc

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(1+x)(2+x)\dots(n-1+x)} = \frac{1}{x} \cdot e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} e^{x/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}.$$

#### Zadania

1. Udowodnić, że jeśli  $b \in \mathbb{Z}$  i  $n \leq 0$ , to  $\lim_{x \rightarrow n} |\Gamma(x)| = \infty$ .
2. Udowodnić, że  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ , tzw. wzór na dopełnienie. Może się tu przydać wzór  $\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right]$ , który był wyprowadzony na ćwiczeniach w grupie JSIM i który można znaleźć bez trudu w drugim tomie książki G.M.Fichtenholza.