Całki niewłaściwe

Spotkaliśmy się przy obliczaniu długości okręgu z problemem całkowania funkcji, która nie była zdefiniowana w końcu przedziału, a nawet w obu końcach. Takie funkcje pojawiają się w wielu sytuacjach. Trzeba więc wyjaśnić nieco dokładniej jak definiujemy całki i co można wnioskować z ich istnienia.

Definicja całki niewłaściwej

Jeśli funkcja $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną i istnieje granica $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$, to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na przedziale $[a,b)$. Stosujemy to samo oznaczenie co dla całki właściwej $\int_a^b f(x)\,dx$. Jeśli całka niewłaściwa jest skończona, to mówimy, że jest *zbieżna*. Jeśli całka $\int_a^b |f(x)|\,dx$ jest zbieżna, to mówimy, że całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest *bezwzględnie* zbieżna. Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą z funkcji określonej na przedziale otwarto–domkniętym $(a,b]$. Jeśli funkcja jest określona na przedziale otwartym (a,b) i istnieją całki niewłaściwe na przedziałach $(a,c]$ i $[c,b)$, to ich sumę, jeśli jest zdefiniowana, nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na przedziale (a,b), stosujemy znów to samo oznaczenie $\int_a^b f(x)\,dx$ ■.

Przykłady

1. Mamy obliczyć całkę $\int_{-r}^{r}\dfrac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$. Funkcja nie jest zdefiniowana w obu końcach przedziału, więc rozpatrzymy oddzielnie dwie całki: $\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$ oraz $\int_{-r}^0 \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$. Zachodzi równość $\int \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{r}+C$, zatem $\lim_{c\to r^-}\int_0^c \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \lim_{c\to r^-}\left(\arcsin\frac{c}{r}-\arcsin\frac{0}{r}\right) =$ $= \arcsin\frac{r}{r}=\frac{\pi}{2}$. Analogicznie $\lim_{c\to -r^+}\int_c^0 \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \lim_{c\to -r^+}\left(\arcsin\frac{0}{r}-\arcsin\frac{-r}{r}\right) =$ $= -\arcsin\frac{-r}{r} = \frac{\pi}{2}$. Obie całki są skończone, czyli zbieżne, więc zgodnie z definicją całka $\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$ jest zbieżna do $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$. ■

2. Obliczymy całkę $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Zachodzą równości $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{1}{1+x^2}\,dx =$ $= \lim_{c\to\infty}(\operatorname{arctg} x)\Big|_0^c = \lim_{c\to\infty}(\operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$. Całka jest więc skończona, zatem funkcja arctg ma całkę niewłaściwą na półprostej $[0,\infty)$. Bez trudu stwierdzić można, że zachodzi równość $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$. ■

3. Teraz zajmiemy się całką $\int_1^\infty x^a\,dx$ zakładając, że $a \neq -1$. Mamy zatem $\int_1^\infty x^a\,dx =$ $= \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^a\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right)\Big|_1^c = \lim_{c\to\infty}\frac{c^{a+1}-1}{a+1} = \begin{cases} +\infty & \text{jeśli } a>-1\,, \\ \frac{-1}{a+1} & \text{jeśli } a<-1\,. \end{cases}$ Okazało się, że im większy wykładnik tym większa całka. Dla „dużych" wykładników całka jest nieskończona dla „małych" skończona tym mniejsza im mniejszy wykładnik. Oczywiście słowa „mały" i „duży" mają znaczenie umowne. ■

4. Obliczymy $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$ zakładając, że $\lambda>0$, w przypadku $\lambda\le 0$ wartości funkcji podcałkowej nie są mniejsze niż 1, więc całka jest nieskończona, bo musi być większa od pola prostokąta o wysokości 1 i dowolnie długiej podstawie. Mamy $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-\lambda x}\,dx =$ $= \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^c \overset{\lambda>0}{=\!=} \frac{1}{\lambda}$. Wykazaliśmy więc, że dla każdego $\lambda>0$ funkcja $e^{-\lambda}$ ma skończoną całkę niewłaściwą na półprostej $[0,\infty)$. ■

5. Wykażemy teraz, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ jest skończona. Mamy $e^{x^2} \geq 1 + x^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wobec tego $\int_0^c e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^c \frac{1}{1+x^2}\,dx < \frac{\pi}{2}$. Całka $\int_0^c e^{-x^2}\,dx$ rośnie wraz z c, oczywiście teraz rozważamy tylko $c > 0$. Wobec tego granica $\lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x^2}\,dx$ istnieje i jedyną kwestią jest to, czy jest ona skończona. Ponieważ dla każdego $c > 0$ wartość całki jest mniejsza niż $\frac{\pi}{2}$, więc $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x^2}\,dx \leq \frac{\pi}{2}$. Spełniliśmy obietnicę: udowodniliśmy, że całka jest skończona. ■

Widać z powyższych przykładów, że powody, dla których trzeba rozpatrywać czasem całki nieoznaczone, bywają różne. Możemy mieć do czynienia z nieograniczoną funkcja lub z nieograniczoną dziedziną funkcji. Nie będziemy tych spraw dokładnie omawiać, bo jak już wielokrotnie mówiliśmy, ekonomiści nie muszą tych kwestii zgłębić, natomiast powinni trochę o nich wiedzieć. Wypada stwierdzić, że jedna z podstawowych różnic miedzy całką Riemanna i całką niewłaściwą jest to, że w przypadku całki niewłaściwej nie jest prawdziwe twierdzenie o sumach Riemanna. W przypadku całki niewłaściwej można na ogół po wybraniu drobnego podziału dziedziny wybrać w przedziałach, które tworzą ten podział, punkty w taki sposób, że otrzymana suma Riemanna będzie odległa od całki. Jeśli np. rozważamy całkę $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, to dzieląc przedział $[0,1]$ punktami $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ na krótkie przedzialiki, nie jesteśmy w stanie uniknąć tego, że w przedziale $[x_{n-1}, x_n)$ funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ przyjmuje wartości dowolnie duże. Możemy więc wybrać w nim punkt t_n w taki sposób, by liczba $\frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{1-t_n^2}}$ była większa niż np. 1410, co spowoduje, że niezależnie od tego jak wybierzemy punkty w pozostałych przedzialikach wartość sumy Riemanna będzie wielokrotnie przewyższać długość okręgu o promieniu 1. Oczywiście stwarza to problemy z interpretacją całki, ale nic na to nie można poradzić. Całki niewłaściwe pojawiają się w naturalny sposób, bo przecież nie można uznać obliczania długości okręgu za zadanie bardzo sztuczne i po prostu należy z większą ostrożnością je stosować, ale należy to robić. We wspomnianym przypadku można np. twierdzić, że rozpatrując nieco krótszy łuk odpowiadający przedziałowi $[0, c)$ możemy go przybliżać całką, całka $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ różni się minimalnie od całki $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, więc sumy Riemanna pierwszej z nich, więc właściwej, przybliżają ją więc krótszy łuk, ale ten krótszy przybliża dłuższy, więc suma Riemanna całki $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ przybliża ćwierć długości okręgu o promieniu 1. Ten przykład pokazać jak należy lub jak można tego rodzaju problemy rozwiązywać. W dalszym ciągu będziemy przyjmować, że opisane wcześniej interpretacje całek właściwych (długości, pola, objętości) zachowują sens również w przypadku całek niewłaściwych. Pokażemy teraz jak korzystając z tych interpretacji można obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ – przypominamy, funkcja pierwotna funkcji e^{-x^2} jest nieelementarna, więc nasze postępowania będzie całkowicie odmienne od prezentowanych dotychczas.

Czytelnicy z pewnością zauważyli pewne podobieństwa między całkami niewłaściwymi i szeregami, nawet terminologia jest w podobna. Omówimy teraz twierdzenia, które to podobieństwo nieźle uwidocznią. Zaczniemy od warunku koniecznego i dostatecznego na zbieżność całki.

Warunek Cauchy'ego zbieżności całki niewłaściwej

Jeśli funkcja $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna na przedziale $[a,x]$ dla każdego $x \in (a,b)$, to całka $\int_a^b f(t)\,dt$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $c_\varepsilon \in (a,b)$ takie, że jeśli $c_\varepsilon < x_1, x_2 < b$, to $\varepsilon > \left| \int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_2} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right|$.

Dowód.

To twierdzenie wynika od razu z twierdzenia mówiącego, że funkcja ($x \longrightarrow \int_a^x t(t)\,dt$) ma skończoną granicę w punkcie b wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest odpowiedni warunek Cauchy'ego. ∎

Kryterium całkowe Cauchy'ego Maclaurina zbieżności szeregu

Jeśli funkcja $f\colon [1,\infty] \longrightarrow [0,\infty)$ jest nierosnąca, to szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka niewłaściwa $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Dowód. Nie ma oczywiście żadnego problemu z istnieniem całek $\int_1^c f(x)\,dx$, bowiem ich istnienie jest konsekwencją monotoniczności funkcji f. Podobnie szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ma sumę, być może nieskończoną, bo jego wyrazy są nieujemne. Ponieważ funkcja f jest nierosnąca, więc nierówność $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$ ma miejsce dla każdej liczby naturalnej n. Stąd od razu wynika, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^\infty f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$, a z tej nierówności teza twierdzenia wynika natychmiast. ∎

Uwaga

Jeśli funkcja $f\colon [1,\infty] \longrightarrow [0,\infty)$ jest nierosnąca i całka $\int_1^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. ∎

Ćwiczonko

Podać przykład funkcji $f\colon [1,\infty] \longrightarrow [0,\infty)$, dla której całka $\int_1^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, chociaż $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

Następne twierdzenie przyda się do dowodu odpowiednika twierdzeń Abela i Dirichleta mówiących o zbieżności szeregu.

Drugie twierdzenie o wartości średniej

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Jest całkowalna, funkcja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — monotoniczna, to istnieje liczba $c \in [a,b]$ taka, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Dowód.

Załóżmy najpierw, że funkcje f, g są wielomianami. Niech $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Mamy

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(t)g'(t)\,dt\,.$$

Ponieważ funkcja g jest monotoniczna, więc jej pochodna g' jest nieujemna albo niedodatnia. Wynika stąd, że istnieje liczba $c \in [a,b]$ taka, że $\int_a^b F(t)g'(t)\,dt = F(c)\int_a^b g'(t)\,dt = F(c)[g(b)-g(a)]$. Wobec tego

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)[g(b)-g(a)] = g(a)[F(c)-F(a)] + g(b)[F(b)-F(c)] =$$
$$= g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Udowodniliśmy twierdzenie w tym przypadku.

Teraz przejdziemy do sytuacji ogólnej. Niech $M > 0$ będzie taką liczbą, że dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzą nierówności $f(x), g(x) < M$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że g jest funkcją niemalejącą. Niech f_n, g_n będą takimi wielomianami, że $\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx < \frac{1}{n}$ i $\int_a^b |g(x) - g_n|\,dx < \frac{1}{n}$ oraz $|f_n(x)|, |g(x)| \le M$. Możemy założyć, że wielomian g_n jest funkcją ściśle rosnącą oraz że $g_n(a) = g(a)$ i $g_n(b) = g(b)$ dla każdego n. Z już udowodnionej części twierdzenia wynika, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba $c_n \in [a,b]$ taka, że

$$\int_a^b f_n(x) g_n(x)\,dx = g(a)\int_a^{c_n} f(x)\,dx + g(b)\int_{c_n}^b f(x)\,dx\,.$$

Ciąg (c_n) może nie mieć granicy, ale można z niego wybrać podciąg zbieżny c_{n_k}. Niech $c = \lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k}$. Mamy teraz

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)g_n(x)\,dx\Big| \le \Big|\int_a^b \big[f(x) - f_n(x)\big]g(x)\,dx + \int_a^b f_n(x)\big[g(x) - g_n(x)\big]\,dx\Big| <$$
$$< \tfrac{1}{n}(b-a)M^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

Podobnie

$$\Big|\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^{c_{n_k}} f_{n_k}(x)\,dx\Big| \le \int_a^{c_{n_k}} \big|f(x) - f_{n_k}(x)\big|\,dx + \Big|\int_c^{c_{n_k}} f(x)\,dx\Big| \le$$
$$\le \int_a^b \big|f(x) - f_{n_k}(x)\big|\,dx + |c - c_{n_k}|\cdot M < \tfrac{1}{n_k} + |c - c_{n_k}|\cdot M \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,,$$
$$\Big|\int_c^b f(x)\,dx - \int_{c_{n_k}}^b f_{n_k}(x)\,dx\Big| \le \int_{c_{n_k}}^b \big|f(x) - f_{n_k}(x)\big|\,dx + \Big|\int_c^{c_{n_k}} f(x)\,dx\Big| \le$$
$$\le \int_a^b \big|f(x) - f_{n_k}(x)\big|\,dx + |c - c_{n_k}|\cdot M < \tfrac{1}{n_k} + |c - c_{n_k}|\cdot M \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$, $\lim\limits_{k\to\infty}\Big[g_{n_k}(a)\int_a^{c_{n_k}} f_{n_k}(x)\,dx\Big] = g(a)\int_a^c f(x)\,dx$ i $\lim\limits_{k\to\infty}\Big[g_{n_k}(b)\int_{c_{n_k}}^b f_{n_k}(x)\,dx\Big] = g(b)\int_c^b f(x)\,dx$, a z tych równości teza wynika od razu. ■

Twierdzenie Abela–Dirichleta dla całek

Niech $g\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną i ograniczoną i niech będzie spełnione jedno z założeń

(i) całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ istnieje i jest skończona;

(ii) dla każdego $x > a$ istnieje $\int_a^x f(t)\,dt$ i istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla dowolnych $x_1, x_2 > a$ zachodzi nierówność $\Big|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\Big| \le M$.

Wtedy całka $\int_a^\infty f(t)g(t)\,dt$ jest zbieżna.

Dowód.

Należy sprawdzić, że jest spełniony warunek Cauchy'ego zbieżności całki niewłaściwej. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Ponieważ funkcja g jest monotoniczna, więc dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in (a,\infty)$, $x_1 < x_2$, istnieje liczba $c \in (x_1, x_2)$ taka, że $\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\,dt = g(x_1)\int_{x_1}^c f(t)\,dt + g(x_2)\int_c^{x_2} f(t)\,dt$. Załóżmy, że spełniony jest warunek (i). Niech $M > 0$ będzie taką liczbą, że dla każdego $x \in (a,\infty)$ zachodzi $|g(x)| \le M$. Ponieważ całka $\int_a^x f(t)\,dt$ jest zbieżna, więc istnieje liczba $d > a$ taka, że jeżeli $x_1, x_2 > d$, to $\big|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\big| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Stąd i z poprzednio napisanej równości wynika, że jeśli $d < x_1 < x_2$, to $\Big|\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\,dt\Big| \le \Big|g(x_1)\int_{x_1}^c f(t)\,dt + g(x_2)\int_c^{x_2} f(t)\,dt\Big| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$.

Drobne zmiany w tym dowodzi niezbędne dla przeprowadzenia dowodu przy założeniu warunku (ii) czytelnik z łatwością wprowadzi sam.

Przykład 6.

Wykażemy, że całka $\int_0^\infty \sin x^2\, dx$ jest zbieżna, choć nie jest to zbieżność bezwzględna.
Jeśli n jest liczbą naturalną i $a_n := \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{6}} \le x \le \sqrt{2n\pi + \frac{5\pi}{6}} := b_n$, to $\sin x^2 \ge \frac{1}{2}$. Wobec tego $\int_0^\infty |\sin x^2|dx \ge \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} |\sin x^2|dx \ge \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi/3}{2(\sqrt{2n\pi+5\pi/6}+\sqrt{2n\pi+\pi/6})} \ge$
$\ge \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{(2n+1)\pi}} = \infty$, co kończy dowód rozbieżności całki $\int_0^\infty |\sin x^2|dx$.

Mamy $\int_1^\infty \sin x^2\, dx \xlongequal[dt=2x\,dx]{t=x^2} \int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t\, dt$. Oczywiście $\left|\int_1^x \sin t\, dt\right| = |cos1 - \cos x| < 2$, funkcja $\frac{1}{\sqrt{t}}$ jest malejąca i zbieżna do 0 przy $t \longrightarrow \infty$, zatem całka $\int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t\, dt$ jest zbieżna. ■

Przykład 7.

Całka $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie. Oczywiście w punkcie 0 nie ma osobliwości, bowiem $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zbieżność całki $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ wynika od razu z kryterium Abela–Dirichleta, brak zbieżności bezwzględnej z tego, że jeśli $2n\pi + \frac{\pi}{6} \le x \le 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$, to $\sin x \ge \frac{1}{2}$ i z tego, że szereg harmoniczny jest rozbieżny.

Wallis, Stirling, Poisson

Niech $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. Dla $n \ge 2$ mamy wtedy $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = I_n =$
$= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\sin^{n-2} x\, dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \cos x\big(\sin^{n-1} x\big)'\, dx =$
$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\cos x\big(\sin^{n-1} x\big)\Big|_0^{\pi/2} = I_{n-2} - 0 + \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = I_{n-2} + \frac{1}{n-1} I_n$. Stąd mamy od razu $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Mamy też $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ i $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$.
Wynika stąd, że

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \ldots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} =$$
$$= \frac{(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{2n\cdot 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Analogicznie

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \ldots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 =$$
$$= \frac{2n\cdot 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Dla każdego $n \ge 0$ zachodzi nierówność $I_n \ge I_{n+1} \ge I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. Wynika z niej, że $1 \ge \frac{I_{n+1}}{I_n} \ge \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Mamy więc

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\cdot 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 3\cdot 1} \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Wobec tego możemy napisać wzór Wallisa

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\cdot 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 3\cdot 1} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots}$$

— oczywiście ostatni napis oznacza granicę, więc ostatnią równość należy traktować jako definicję symbolu występującego po prawej stronie.

Zajmiemy się teraz przybliżeniem $n!$ dla dużych n. Chodzi o to, by znaleźć wyrażenie, za pomocą którego można będzie przybliżać silnię. Ona na ogół występuję jako czynnik jakiegoś iloczynu, więc chodzi o wyrażenie, które podzielone przez $n!$ będzie dążyć do 1, wielkich szans na to by różnica dążyła do 0 nie ma, jeśli chcemy znaleźć prosty wzór oczywiście nie zawierający silni. Ponieważ $0 < \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, więc przyjrzymy się ilorazowi dwóch kolejnych wyrazów ciągu $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$, by zrozumieć, jak szybko ten ciąg dąży do 0. Mamy $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left[1+\frac{1}{n}\right]^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$. Rozważymy więc ciąg zdefiniowany wzorem $a_n = n! \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n$. Z poprzednio uzyskanych równości wnioskujemy, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \cdot \left[1+\frac{1}{n}\right]^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Mamy dalej $\ln a_n = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1\right) =$
$= \ln\left(e \cdot \left[1+\frac{1}{n-1}\right]^{-n+1}\right) + \ln\left(e \cdot \left[1+\frac{1}{n-2}\right]^{-n+2}\right) + \cdots + \ln\left(e \cdot \left[1+\frac{1}{1}\right]^{-1}\right) + \ln e =$
$= \Big(1-(n-1)\ln\left[1+\frac{1}{n-1}\right]\Big) + \Big(1-(n-2)\ln\left[1+\frac{1}{n-2}\right]\Big) + \cdots + \Big(1-\ln\left[1+\frac{1}{1}\right]\Big) + 1$.

Przyjrzymy się jednemu składnikowi. Mamy
$1 - k\ln\left[1+\frac{1}{k}\right] = 1 - k\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{4k^4} + \cdots\right] = \frac{1}{2k} - \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{4k^3} - \cdots = \frac{1}{2k} - b_k$, gdzie $b_k = \frac{1}{3k^2} - \frac{1}{4k^3} + \cdots \in \left(\frac{1}{3k^2} - \frac{1}{4k^3}, \frac{1}{3k^2}\right)$. Wyrazy szeregu zbieżnego $\sum b_n$ są dodatnie, więc jego ciąg sum częściowych jest ściśle rosnący. Mamy więc

$$\ln a_n = \left(\frac{1}{2(n-1)} - b_{n-1}\right) + \left(\frac{1}{2(n-2)} - b_{n-2}\right) + \cdots + \cdots + \left(\frac{1}{2} - b_1\right) + 1 =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right] + 1 - [b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}].$$

Szereg $\sum b_j$ jest zbieżny, ale szereg harmoniczny niestety nie. Mamy
$0 < \frac{1}{k-1} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx = \int_{k-1}^{k} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{x}\right] dx = \int_{k-1}^{k} \frac{x-(k-1)}{x(k-1)}\,dx < \frac{1}{(k-1)^2}\int_{k-1}^{k}\left[x-(k-1)\right]dx = \frac{1}{2(k-1)^2}$.
Przyjmijmy $c_{k-1} = \frac{1}{k-1} - \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx$. Szereg $\sum c_n$ jest zbieżny i ma dodatnie wyrazy. Z równości $\frac{1}{k} = \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx + c_{k-1}$ wynika, że
$\ln a_n = 1 + \frac{1}{2}\left[1 + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + c_1 + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + c_2 + \cdots + \int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}\,dx + c_{n-1}\right] - [b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}] =$
$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx + [c_1 + c_2 + \cdots + c_n] - [b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}] = \frac{3}{2} + \ln\sqrt{n} + [c_1 + c_2 + \cdots + c_n] - [b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}]$.
Wynika stąd, że ciąg $(\ln a_n - \ln\sqrt{n})$ ma granicę skończoną, zatem ciąg $\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)$ ma granicę skończoną i dodatnią. Niech $\alpha_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n! \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n$ i niech $g = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$. Wynika stąd, że $g = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{2n}$ (granica podciągu równa jest granicy ciągu). Wnioskujemy stąd, że

$$g = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot(n!)^2\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}\cdot\sqrt{2n}\cdot\frac{1}{(2n)!}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!}\right\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}\cdot\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdot(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}} =$$
$$= 2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}.$$

Udowodniliśmy wzór znany pod nazwą *wzór Stirlinga* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n!\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^n = \sqrt{2\pi}$ zapisywany zwykle nieco mniej precyzyjnie

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Zajmiemy się teraz całką $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Zwana jest ona całką Poissona. Znajdziemy jej wartość, oczywiście nie zajmując się funkcją pierwotną funkcji e^{-x^2}, bo ta nie jest funkcją elementarną. Mamy $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \overset{x=t\sqrt{n}}{\underset{dx=\sqrt{n}\,dt}{=\!=\!=\!=}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt =$ $\overset{t=\cos s}{\underset{dt=-\sin s\,ds}{=\!=\!=\!=}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_{\pi/2}^0 \sin^{2n} s(-\sin s)\,ds = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} s\,ds = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} =$ $\overset{Stirling}{\underset{dwa\ razy}{=\!=\!=\!=}} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{4^n\cdot 2\pi n\cdot n^{2n}\cdot e^{2n+1}}{e^{2n}\cdot\sqrt{2\pi(2n+1)}\cdot(2n+1)^{2n+1}} = \sqrt{2\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot e\cdot\left[\frac{2n}{2n+1}\right]^{2n}\right\} =$

$$= \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot e\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Analogicznie $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \overset{x=t\sqrt{n}}{\underset{dx=\sqrt{n}\,dt}{=\!=\!=\!=}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \leq$

$\leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \overset{t=\operatorname{tg} s}{\underset{dt=\cos^{-2} s\,ds}{=\!=\!=\!=}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2} s\,ds < \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} s\,ds =$ $\overset{s=\pi/2-\sigma}{\underset{ds=-\,d\sigma}{=\!=\!=\!=}} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} s\,ds = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \overset{Stirling}{\underset{dwa\ razy}{=\!=\!=\!=}} \frac{\pi}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{2\pi(2n)}\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{2n}}{4^n\cdot e^{2n}\cdot(2\pi n)\cdot(n^n)^2} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.