Analiza, część siódma

Zaczniemy od drobnego uzupełnienia dowodu twierdzenia Arzeli–Ascoli'ego.

Lemat o ośrodkowości zbioru zwartego

Jeśli K jest zbiorem zwartym, to istnieje zbiór **przeliczalny** lub **skończony** $D \subseteq K$ taki, że dla każdej liczby $\delta > 0$ i każdego $x \in K$ istnieje punkt $y \in D$ taki, że $\|x - y\| < \delta$.

Dowód.

Załóżmy, że $A \subseteq K$ jest zbiorem δ–rozdzielonym, tzn. że jeśli $x, y \in A$ i $x \neq y$, to $\|x - y\| \geq \delta$. Wtedy zbiór ma skończenie wiele elementów. Gdyby miał ich nieskończenie wiele, to istniałby ciąg (a_n) taki, że $\|a_m - a_n\| \geq \delta$, gdy $m \neq n$, ale z takiego ciągu nie można wybrać podciągu zbieżnego, bo podciąg zbieżny musiałby spełniać warunek Cauchy'ego. Niech A_1 będzie maksymalnym zbiorem 1–rozdzielonym, A_2 — maksymalnym zbiorem $\frac{1}{2}$–rozdzielonym, A_3 — maksymalnym zbiorem $\frac{1}{3}$–rozdzielonym itd. Jeśli $x \notin A_k$, to istnieje $a \in A_k$ taki, że $\|x - a\| < \frac{1}{k}$, w innym przypadku moglibyśmy dołączyć x do zbioru A_k i otrzymać większy niż A_k zbiór $\frac{1}{k}$–rozdzielony, wbrew temu, że A_k jest maksymalnym o tej własności. Przyjmujemy $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Jest jasne, że zbiór ten spełnia żądany warunek. ■

Komentarz

Zbiór (przestrzeń) X nazywany jest ośrodkowym, jeśli istnieje zbiór skończony lub przeliczalny $D \subseteq X$ gęsty w zbiorze X czyli taki, że dla każdej liczby $\delta > 0$. Można więc udowodniony właśnie lemat sformułować tak: przestrzeń zwarta (metryczna) jest ośrodkowa. ■

Operacje na szeregach potęgowych i nie tylko.

Zaczniemy od uogólnienia twierdzenia o zmianach kolejności sumowania szeregu bezwzględnie zbieżnego.

Twierdzenie o dużej zmianie kolejności sumowania

Jeśli zachodzi jedno z dwóch założeń:

(i) dla każdej liczby całkowitej $m \geq 0$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$ jest zbieżny i $\sum_{m=0}^{\infty} \big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| \big) < +\infty$,

(ii) $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}| < \infty$ dla pewnej bijekcji $\tilde{\sigma} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

to dla każdej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zachodzi równość $\sum_{m=0}^{\infty} \big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \big) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}$.

Dowód.

Wykażemy najpierw, że warunki (i) oraz (ii) są równoważne.

Załóżmy, że spełniony jest warunek (i). Dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ szereg $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\sigma(j)}|$ jest zbieżny, bo $\sum_{j=0}^{l} |a_{\sigma(j)}| \leq \sum_{m=0}^{p} \big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| \big)$ dla każdej tak dużej liczby naturalnej p, że każda z liczb $|a_{\sigma(0)}|$, $|a_{\sigma(1)}|$, $\ldots$, $|a_{\sigma(l)}|$ jest składnikiem któregoś z szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$, $m = 0, 1, \ldots, p$ (np. p jest największym z pierwszych elementów par $\sigma(0)$, $\sigma(1)$, $\ldots$, $\sigma(l)$). Wobec tego drugi warunek wynika z pierwszego.

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek (ii). dla każdej liczby naturalnej m i dla każdej liczby naturalnej k spełniona jest nierówność $\sum_{n=0}^{k}|a_{m,n}| \le \sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde\sigma(j)}|$. Oznacza to, że dla każdej liczby naturalnej m ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|$ jest ograniczony z góry przez $\sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde\sigma(j)}|$, więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|$ jest zbieżny i $\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}| \le \sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde\sigma(j)}|$. Z twierdzenia o sumie szeregów (skończenie wielu) wynika, że dla każdej liczby $l \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\sum_{m=0}^{l}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}| \le \sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde\sigma(j)}|$, a więc również $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}| \le \sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde\sigma(j)}|$. Wykazaliśmy, że z założenia (ii) wynika założenie (i). W istocie rzeczy wykazaliśmy nieco więcej:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}| = \sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde\sigma(j)}|\,,$$

przy czym równość jest prawdziwa zawsze, również wtedy, gdy sumy nie są skończone.

Niech $\varepsilon > 0$. Niech $k(m)$ oznacza taką liczbę naturalną, że $\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}|a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2^{m+3}}$. Wtedy

$$\Big|\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} a_{m,n}\Big| \le \sum_{n=k(m)+1}^{\infty}|a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2^{m+3}}\,,$$

zatem

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} a_{m,n}\Big)\Big| < \frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{32}+\cdots = \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Niech $r(\varepsilon)$ i $\mu(\varepsilon)$ będą takimi liczbami naturalnymi, że

$$\sum_{j=r(\varepsilon)+1}^{\infty}|a_{\sigma(j)}| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{i} \qquad \sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Niech $\rho(\varepsilon)$ oznacza taką liczbę naturalną, że

$$\Big\{\sigma(0),\sigma(1),\ldots,\sigma(r(\varepsilon))\Big\} \subseteq$$

$$\subseteq \Big\{(0,0),(0,1),\ldots,(0,k(0)),(1,0),(1,1),\ldots,(1,k(1)),\ldots,(\mu(\varepsilon),0),(\mu(\varepsilon),1),\ldots,(\mu(\varepsilon),k[\mu(\varepsilon)])\Big\}$$

$$\subseteq \Big\{\sigma(0),\,\sigma(1),\,\sigma(2),\,\ldots,\,\sigma\big[\rho(\varepsilon)\big]\Big\}\,.$$

Wtedy zachodzą nierówności

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big) - \sum_{j=0}^{\infty}a_{\sigma(j)}\Big| &\le \Big|\sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)\Big| + \Big|\sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=0}^{k(m)}a_{m,n}\Big) - \sum_{j=0}^{\rho(\varepsilon)}a_{\sigma(j)}\Big| + \\ &+ \Big|\sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}a_{m,n}\Big)\Big| + \Big|\sum_{j=\rho(\varepsilon)+1}^{\infty}a_{\sigma(j)}\Big| \le \sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) + \sum_{j=r(\varepsilon)+1}^{\rho(\varepsilon)}|a_{\sigma(j)}| + \\ &+ \sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) + \sum_{j=\rho(\varepsilon)+1}^{\infty}|a_{\sigma(j)}| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Ponieważ ε oznacza dowolną liczbę dodatnią, więc zachodzi równość

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}a_{\sigma(j)}\,.$$

W ten sposób zakończyliśmy omawianie zmian kolejności sumowania szeregów podwójnych. Twierdzenie to przyda się nam do wykazania, że złożenie funkcji analitycznych jest funkcją analityczną.

Zaczniemy od definicji funkcji analitycznej.

Definicja funkcji analitycznej

Funkcję f określoną na otoczeniu punktu p nazywamy analityczną w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (a_n) taki, że dla pewnej liczby $r>0$ równość $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n$ zachodzi dla każdego x, dla którego $|x-p|<r$. Jeśli funkcja f jest analityczna w każdym punkcie zbioru A, to mówimy, że jest analityczna w zbiorze A. ■

Przykład

Każdy wielomian jest funkcją analityczną w $\mathbb{R}$ a nawet w $\mathbb{C}$. Niech $w(x)=\sum\limits_{n=0}^{d}a_nx^n$, $a_d\neq 0$. Przyjmując $a_n=0$ dla $n>d$ możemy napisać $w(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. Wobec tego

$$w(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-p+p)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}a_n\tbinom{n}{j}(x-p)^jp^{n-j}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{j}(x-p)^jp^{n-j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{j}(x-p)^jp^{n-j}=\sum_{j=0}^{\infty}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{j}p^{n-j}\Big](x-p)^j=\sum_{j=0}^{k}\Big[\sum_{n=j}^{k}a_n\tbinom{n}{j}p^{n-j}\Big](x-p)^j=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\tfrac{w^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j\,.$$

Podaliśmy dowód bezpośredni, ale oczywiście ten wzór wynika też z wzoru Lagrange'a na $(k+1)$–ą resztę we wzorze Taylora. ■

Twierdzenie o analityczności funkcji zdefiniowanej za pomocą szeregu potęgowego

Jeśli $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n$ dla każdego x, dla którego $|x-p|<r$, gdzie $r>0$ i $|q-p|<r$, to dla każdego x takiego, że $|x-q|<r-|p-q|$ zachodzi równość $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(q)}{n!}(x-q)^n$, zatem funkcja jest analityczna w kole o środku p i promieniu r.

Dowód.

Z twierdzenia o pochodnej szeregu potęgowego wynika, że

$$f^{(j)}(q)=\sum_{n=j}^{\infty}n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j+1)a_n(q-p)^{n-j}=\sum_{n=j}^{\infty}j!\tbinom{n}{j}a_n(q-p)^{n-j}\,.$$

Możemy więc napisać, że

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-q+q-p)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{j=0}^{n}\tbinom{n}{j}(x-q)^j(q-p)^{n-j}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{j=0}^{\infty}\tbinom{n}{j}(x-q)^j(q-p)^{n-j}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{j}(x-q)^j(q-p)^{n-j}=\sum_{j=0}^{\infty}(x-q)^j\sum_{n=j}^{\infty}a_n\tbinom{n}{j}(q-p)^{n-j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\tfrac{f^{(j)}(q)}{j!}(x-q)^j\,,$$

jeśli tylko potrafimy uzasadnić zmianę kolejności sumowania. Kolejność sumowania może być zmieniona, bowiem $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a_n|\binom{n}{j}|x-q|^j|q-p|^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\big(|x-q|+|q-p|\big)^n < \infty$, bo $|x-q|+|q-p| < r$. W istocie rzeczy korzystamy w tym miejscu jedynie z tego, ze suma szeregu bezwzględnie zbieżnego jest niezależna od kolejności, w jakiej sumujemy jego wyrazy. ■

Uwaga. Oczywiście promień zbieżności szeregu potęgowego może ulec zmianie. Funkcja $\frac{1}{x}$ *jest analityczna w punkcie* 1, *bowiem* $\frac{1}{x} = \frac{1}{x-1+1} \overset{|x-1|<1}{=\!=\!=} \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$. *Jest też analityczna w dowolnym punkcie* $p \neq 0$, *bowiem*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-p+p} = \frac{1}{p(1+\frac{x-p}{p})} = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{p-x}{p}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{n+1}}(x-p)^n .$$

Bez trudu stwierdzamy, że promień zbieżności równy jest w tym przypadku $|p|$, *jasne jest więc, że przechodząc od* 1 *do* $\frac{1}{2}$ *zmniejszamy promień, a przechodząc od* 1 *do* $\frac{3}{2}$ *— zwiększamy. To ostatnie stwierdzenie wynika z zachowania się tej akurat funkcji, oczywiście w innych przypadkach może być inaczej.* ■

Twierdzenie o analityczności złożenia funkcji analitycznych

Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p a funkcja g jest analityczna w punkcie $f(p)$, to złożenie tych funkcji jest analityczne w punkcie p.

Dowód.

Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n$, jeśli $|x-p| < r$, $r > 0$ i niech $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty}b_n\big[y-f(p)\big]^n$, jeśli $|y-f(p)| < \rho$, $\rho > 0$. Ponieważ funkcja zdefiniowana szeregiem potęgowym jest ciągła i szereg potęgowy jest wewnątrz swego przedziału (koła) zbieżności jest zbieżny bezwzględnie, więc istnieje liczba dodatnia $r_0 < r$ taka, że jeśli $|x-p| < r_0$, to $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot|x-p|^n < \rho$. Wynika stąd, że $\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot|x-p|^n\Big)^j < \infty$, dzięki czemu możemy zmieniać kolejność sumowania dowolnie. Z twierdzenia O mnożeniu szeregów wynika można szereg potęgowy podnieść do dowolnej naturalnej potęgi. W wyniku otrzymujemy szereg potęgowy. Niech $\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot(x-p)^n\Big)^j = \sum_{n=0}^{\infty}a_{j,n}(x-p)^n = \sum_{n=j}^{\infty}a_{j,n}(x-p)^n$. Z nierówności trójkąta wynika, że prawdziwa jest nierówność $\sum_{n=j}^{\infty}|a_{j,n}|\cdot|x-p|^n \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot|x-p|^n\Big)^j$. Wobec tego w szeregu podwójnym $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}a_{j,n}(x-p)^n$ można zmieniać kolejność wyrazów dowolnie nie wpływając na jego zbieżność ani sumę. Mamy więc $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}a_{j,n}(x-p)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}a_{j,n}(x-p)^n$. Dowód został zakończony. ■

Następne twierdzenie, którym się zajmiemy zwykle nie jest dowodzone w ramach wykładu z analizy na pierwszym roku i studenci poznają je na wykładzie z funkcji analitycznych z zupełnie innym dowodem niż pochodzący od Cauchy'ego, który przedstawimy za chwilę.

Twierdzenie o analityczności funkcji odwrotnej

Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p i $f'(p) \neq 0$, to po ograniczeniu jej dziedziny do dostatecznie małego otoczenia punktu p otrzymujemy funkcję różnowartościową, której funkcja odwrotna jest analityczna.

Dowód.

Ponieważ funkcje: T przypisująca liczbie y liczbę $y - f(p)$ i funkcja S przypisująca liczbie x liczbę $x + p$ są analityczne i odwrotne do nich też, więc możemy zająć się istnieniem funkcji odwrotnej do funkcji $g := T \circ f \circ S$. Jeśli wykażemy, że to złożenie ma funkcję odwrotną, to będziemy mogli napisać $f^{-1} = S \circ (T \circ f \circ S)^{-1} \circ T$, więc na mocy poprzedniego twierdzenia f okaże się być funkcją analityczną. Oczywiście $g(0) = T \circ f \circ S(0) = 0$. Niech $g(x) = T \circ f \circ S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Oczywiście $a_1 = g'(0) = f'(p) \neq 0$. Chcemy udowodnić, że funkcja g^{-1} jest analityczna w punkcie 0. Niech $g^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Udowodnimy, że liczby $b_1, b_2, \ldots$ można wybrać tak, że w pewnym otoczeniu 0 będzie spełniona równość

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j\Big)^n = a_1\big(b_1x + b_2x^2 + \cdots\big) + a_2\big(b_1x + b_2x^2 + \cdots\big)^2 + a_3\big(b_1x + b_2x^2 + \cdots\big)^3 + \cdots.$$

Oczywiście ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ wynika, że dla x dostatecznie bliskich 0 zachodzi wzór:

$$x = a_1b_1x + \big[a_1b_2 + a_2b_1^2\big]x^2 + \big[a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3\big]x^3 + \big[a_1b_4 + 2a_2b_1b_3 + a_2b_2^2 + 3a_3b_1^2b_2 + a_4b_1^4\big]x^4 + \cdots.$$

Wynika z tej równości, że

$$b_1 = \frac{1}{a_1};$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_1}\big[a_2b_1^2\big];$$

$$b_3 = -\frac{1}{a_1}\big[2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3\big];$$

$$b_4 = -\frac{1}{a_1}\big[2a_2b_1b_3 + a_2b_2^2 + 3a_3b_1^2b_2 + a_4b_1^4\big]$$

Widzimy więc, że udaje się obliczyć kolejno $b_1, b_2, \ldots$ Wobec tego możliwe jest napisanie wzoru na funkcję odwrotną w postaci szeregu potęgowego, co nieomal kończy dowód. Pozostaje jednak kwestia zbieżności otrzymanego szeregu. Teoretycznie mogłoby się zdarzyć, że promień zbieżności otrzymanego szeregu równy jest 0. Zajmiemy się tym problemem teraz. Ponieważ promień zbieżności szeregu $\sum a_n$ jest dodatni, więc istnieje liczba $c > 0$, dla której szereg $\sum a_n c^n$ jest zbieżny bezwzględnie. Wobec tego $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$, zatem ciąg $\big(a_n c^n\big)$ jest ograniczony. Oznacza to, że istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $|a_n c^n| \leq M$, zatem $|a_n| \leq Mc^{-n}$. Zdefiniujemy pomocniczą funkcję analityczną $h(x) = a_1x - Mc^{-2}x^2 - Mc^{-3}x^3 - \cdots$. Znajdujemy współczynniki

$d_1, d_2, \ldots$ szeregu Maclaurina funkcji h^{-1}. Wyrazić je można za pomocą tych samych wzorów, które otrzymaliśmy w przypadku współczynników funkcji g^{-1} z tym tylko, że liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zastępujemy kolejno liczbami $|a_1|, -Mc^{-2}, -Mc^{-3}, \ldots$.

Mamy więc $d_1 = \frac{1}{|a_1|} \geq |b_1|$, $d_2 = -\frac{1}{|a_1|}\left[-Mc^{-2}d_1^2\right] = \frac{1}{|a_1|}\left[Mc^{-2}d_1^2\right] \geq \left|-\frac{1}{a_1}\left[a_2b_1^2\right]\right| = |b_2|$, $d_3 = -\frac{1}{|a_1|}\left[-2Mc^{-2}d_1d_2 - 2Mc^{-3}d_1^3\right] = \frac{1}{|a_1|}\left[2Mc^{-2}d_1d_2 + 2Mc^{-3}d_1^3\right] \geq \left|-\frac{1}{a_1}\left[2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3\right]\right| = |b_3|$. Analogicznie $d_4 \geq |b_4|$ itd. (INDUKCJA!). Wynika stąd, że wystarczy wykazać, że promień zbieżności szeregu $\sum d_n x^n$ jest dodatni! Mamy

$$y = h(x) = |a_1|x - Mc^{-2}x^2 - Mc^{-3}x^3 - \cdots = |a_1|x - \frac{Mc^{-2}x^2}{1 - c^{-1}x} = \frac{|a_1|c^2x - (|a_1|c + Mx^2)}{c^2 - cx},$$

czyli $(|a_1|c + M)x^2 - (cy + a_1c^2)x + c^2y = 0$. Otrzymane równanie kwadratowe rozwiązujemy bez trudu: $x = \frac{1}{2(|a_1|c+M)}\left[(cy + |a_1|c^2) \pm \sqrt{(cy + |a_1|c^2)^2 - 4c^2y(|a_1|c + M)}\right]$. Ponieważ $h(0) = 0$, więc również $h^{-1}(0) = 0$. Oznacza to, że $x = \frac{1}{2(|a_1|c+M)}\left[(cy + |a_1|c^2) - \sqrt{(cy + |a_1|c^2)^2 - 4c^2y(|a_1|c + M)}\right]$. Wyraziliśmy x jako funkcję zmiennej y i to funkcję analityczną, bowiem złożenie funkcji analitycznych, suma i różnica funkcji analitycznych są funkcjami analitycznymi, wielomian jest funkcją analityczną, pierwiastek kwadratowy też, bo jeśli $q > 0$, to

$$\sqrt{x} = \sqrt{q + x - q} = \sqrt{q} \cdot \sqrt{1 + \frac{x-q}{q}} = \sqrt{q} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{x-q}{q}\right)^n$$

— skorzystaliśmy z szeregu dwumianowego Newtona, promieniem zbieżności otrzymanego szeregu potęgowego jest liczba $|q|$. Dowód został zakończony. ■

Z udowodnionych twierdzeń wynika od razu, że funkcje analityczne w ustalonym punkcie tworzą zbiór zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez te, które nie przyjmują wartości 0. Można je tez składać i odwracać. Wyjaśnia to, dlaczego praktycznie wszystkie, którymi się zajmujemy, są analityczne, czasem z wyjątkiem nielicznych punktów.

Zasada identyczności

Jeśli funkcje analityczne f i g pokrywają się w punktach zbioru, który ma punkt skupienia p, to pokrywają się w pewnym otoczeniu punktu p.

Dowód.

Niech $f(x_n) = g(x_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ i $n \neq m \Longrightarrow x_n \neq x_m$. Niech $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$ i niech $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-p)^n$. Mamy $a_0 = f(p) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(p) = b_0$. Wobec tego dla każdego j zachodzi równość $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_j-p)^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x_j-p)^{n-1}$ — otrzymujemy ją dzieląc równość $f(x) - a_0 = g(x) - b_0$ stronami przez $x_j - p$. Z tej równości i ciągłości funkcji analitycznych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_j-p)^{n-1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x_j-p)^{n-1}$ wynika, że $a_1 = \lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_j-p)^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x_j-p)^{n-1} = b_1$. To rozumowanie indukcyjne można kontynuować. W rezultacie równość $a_n = b_n$ ma miejsce dla wszystkich liczb naturalnych n, co dowodzi, że w całym przedziale zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_j - p)^n$ zachodzi równość $f(x) = g(x)$. ■

Przykład

Tangens jest funkcją analityczną we wszystkich punktach x, w których $\cos x \neq 0$. Wynika to z tego, że $\operatorname{tg} x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$. Funkcje sinus i kosinus są analityczne w całej prostej (w całej płaszczyźnie), bo promienie zbieżności ich szeregów Maclaurina są równe $+\infty$. Funkcja $\frac{1}{x}$ jest analityczna w każdym punkcie $p \neq 0$. Wynika stąd, że funkcja $\frac{1}{\cos x}$ jest złożeniem funkcji analitycznych i wobec tego też jest analityczna. Wobec tego tangens jest iloczynem dwu funkcji analitycznych, zatem jest funkcją analityczną. Podkreślić wypada, że od tego stwierdzenia do uzyskania rozwinięcia tangensa np. w szereg Maclaurina droga nie jest krótka. Można natomiast wyliczać współczynniki tego rozwinięcia korzystając z równości $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$: jeśli $\operatorname{tg} x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots$ $(0 = a_0 = a_2 = a_4 = \ldots$, bo $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x)$, to $a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + \cdots = 1 + (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots)^2 = 1 + a_1^2x^2 + 2a_1a_3x^4 + {}$ $+(2a_1a_5 + a_3^2)x^6 + (2a_1a_7 + 2a_3a_5)x^8$, co prowadzi do równości $a_1 = 1$, $3a_3 = a_1^2$, $5a_5 = 2a_1a_3$, ... a z nich możemy kolejno obliczyć $a_1, a_3, a_5, \ldots$ ■