Analiza, część szósta

Definicja zbieżności punktowej i jednostajnej.

Niech $f_n\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ (lub $f_n\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$) będzie ciągiem funkcji określonych na zbiorze A. Mówimy, że ciąg ten jest zbieżny *punktowo* do funkcji $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ($f\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in A$ zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{tzn.} \qquad \forall_{x\in A}\forall_{\varepsilon>0}\exists_k\forall_{n>k}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\,,$$

piszemy wtedy $f_n \to f$.

Ciąg (f_n) jest zbieżny *jednostajnie* do funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_k\forall_{n>k}\forall_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\,.$$

Piszemy wtedy $f_n \rightrightarrows f$.

Szereg funkcyjny jest zbieżny punktowo, jeśli jego ciąg sum częściowych jest zbieżny punktowo. Analogicznie szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie, jeśli jego ciąg sum częściowych jest zbieżny jednostajnie. ■

Różnica formalna polega na umiejscowieniu kwantyfikatora $\forall_{x\in A}$. W jej rezultacie w pierwszym przypadku liczba naturalna k może zależeć zarówno od x jak i od ε, w przypadku zbieżności jednostajnej liczba k zależy jedynie od ε. Oczywiście należy natychmiast rzecz poprzeć przykładem.

Przykład 1.

Niech $A=[0,1]$, $f_n(x)=x^n$. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ dla $0\le x<1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$. Zatem ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji f zdefiniowanej wzorami $f(x)=0$ dla $0\le x<1$ i $f(1)=1$. Wykażemy, że ciąg ten nie jest zbieżny jednostajnie do funkcji f. Gdyby był to dla dostatecznie dużych n i wszystkich $x\in[0,1]$ musiałaby zachodzić nierówność $|f_n(x)-f(x)|<\frac13$. Mamy jednak $f_n\Big(\sqrt[n]{\frac12}\Big) - f\Big(\sqrt[n]{\frac12}\Big) = \frac12 > \frac13$. ■

Jasne jest, że jeśli ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, to jest również zbieżny punktowo do tej samej funkcji f. Powyższy przykład pokazuje, że odwrotnie na ogół nie jest.

Przykład 2.

Niech $f_n(x) = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$. Wiemy od dawna, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\big[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\big] = e^x =: f(x)$, czyli że ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo na całej prostej do funkcji f, $f(x)=e^x$. W istocie rzeczy wiemy nieco więcej: zbieżność ta jest jednostajna na każdym przedziale ograniczonym. Przypomnijmy bowiem, że jeśli $n\ge 2a>0$ oraz $a\ge|x|$, to $\frac{|x|^{n+k}}{(n+k)!} = \frac{|x|^{n+k-1}}{(n+k-1)!}\cdot\frac{|x|}{n+k} \le \frac{|x|^{n+k-1}}{(n+k-1)!}\cdot\frac{a}{n} \le \frac{|x|^{n+k-1}}{(n+k-1)!}\cdot\frac12$. Stąd bez trudu wnioskujemy, że $\frac{|x|^{n+k}}{(n+k)!} \le \frac{1}{2^k}\cdot\frac{a^n}{n!}$. Mamy zatem $\big|e^x-\big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\big)\big| = \big|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{n+k}}{(n+k)!}+\cdots\big| \le$ $\le \frac{a^n}{n!}\big[\frac12+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\cdots\big] = \frac{a^n}{n!}$. Uzyskaliśmy oszacowanie **niezależne** od wyboru liczby x z przedziału $[-a,a]$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$, więc ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na przedziale $[-a,a]$.

Ten sam dowód można przeprowadzić traktując różnicę $f(x)-f_n(x)$ jako n–tą resztę we wzorze

Maclaurina dla funkcji f. Postać Lagrange'a tej reszty pozwoli nam uzyskać tylko nieco gorsze oszacowanie niż uzyskane wyżej.
Na razie nie wypowiedzieliśmy się na temat zbieżności jednostajnej tego ciągu na całej prostej lub choćby na półprostej. Wykażemy, że na tak dużych zbiorach ciąg nie jest jednostajnie zbieżny. Załóżmy, że jest jednostajnie zbieżny na półprostej $(-\infty, b]$. Istnieje wtedy tak duża liczba naturalna n_1 że jeśli $n > n_1$, to $|f(x) - f_n(x)| < 1$. Niech $n - 1 > n_1$. Wtedy $\big|f(x) - f_{n-1}(x)\big| < 1$ i $\big|f(x) - f_n(x)\big| < 1$, zatem $\big|\frac{x^n}{(n)!}\big| = \big|f_{n-1}(x) - f_n(x)\big| \leq |f_{n-1}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < 2$. W szczególności jest tak dla $x = -n$, jeśli tylko n jest dostatecznie dużą liczbą naturalną. To jednak jest niemożliwe, bowiem $\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} > n > 2$ dla $n > 2$. ■

Końcówka przeprowadzonego rozumowania przekonuje nas szybko o tym, że jednostajnie zbieżny ciąg funkcyjny spełnia warunek Cauchy'ego:

Warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego (jednostajny w.C.)

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists n_\varepsilon \forall_{n>n_\varepsilon}\forall_k \forall_{x\in D}\ \big|f_{n+k}(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon\,. \tag{j.w.C.}$$

Tutaj (f_n) oznacza ciąg funkcji określonych na zbiorze D. ■

Twierdzenie

Ciąg funkcji (f_n) jest jednostajnie zbieżny na zbiorze D do funkcji f określonej na D wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia j.w.C. ■

Dowód polega na zastosowaniu tego twierdzenia dla ciągów liczbowych, co jest łatwe, tym nie mniej zrobimy to.

Dowód.

Załóżmy najpierw, że ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f i niech $\varepsilon > 0$. Jeśli n, k są dostatecznie dużymi liczbami naturalnymi, to dla każdego punktu $x \in D$ zachodzą nierówności $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, zatem $|f_n(x) - f_k(x)| \leq |f_n(x) - f_(x)| + |f(x) - f_n(x)| <$ $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, zatem ze zbieżności jednostajnej wynika jednostajny warunek Cauchy'ego.
Załóżmy teraz, że ciąg (f_n) spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego. Niech $x \in D$. Ponieważ ciąg $\big(f_n(x)\big)$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc ma skończoną granicę. Oznaczmy ją przez $f(x)$. Mamy więc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Zdefiniowaliśmy więc funkcję f na zbiorze D. Niech $\varepsilon > 0$. Dla dostatecznie dużych n, k mamy $|f_n(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, zatem $\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \geq \lim\limits_{k\to\infty} |f_n(x) - f_k(x)| = |f_n(x) - f(x)|$, co dowodzi jednostajnej zbieżności ciągu (f_n) na zbiorze D. Dowód został zakończony. ■

Kryterium Weierstrassa zbieżności szeregu funkcyjnego

Jeśli $\sum f_n$ jest szeregiem funkcji określonych na zbiorze D i istnieje szereg zbieżny $\sum a_n$ taki, że dla każdego $x \in D$ zachodzi nierówność $|f_n(x)| \leq a_n$, to szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze D.

Dowód.

Wynika to od razu z tego, że dla szeregu *zbieżnego* $\sum a_n$ spełniony jest w.C. Z tego wynika od razu, że dla każdej liczby dodatniej ε, dla dostatecznie dużych n i wszystkich k zachodzi nierówność $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}<\varepsilon$ i wobec tego dla wszystkich $x\in D$ zachodzi nierówność

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+k}(x)|<\varepsilon\,,$$

a to oznacza, że spełniony jest j.w.C. Stąd jednostajna zbieżność szeregu $\sum f_n$ na zbiorze D wynika od razu. ■

Twierdzenie o jednostajnej zbieżności szeregu potęgowego

Szereg potęgowy jest zbieżny na każdym domkniętym przedziale zawartym w przedziale zbieżności.

Dowód.

Zaczniemy od części łatwiejszej. Niech $r>0$ oznacza promień zbieżności szeregu $\sum a_nx^n$ i niech $[\alpha,\beta]\subset(-r,r)$. Niech $c<r$ oznacza liczbę *większą* zarówno od $|\alpha|$ jak i od $|\beta|$. Wobec tego $|a_nx^n|<|a_n|c^n$ i jednocześnie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|c^n<+\infty$, wobec tego szereg $\sum a_nx^n$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[\alpha,\beta]$. Jak widać jest to po prostu powtórka dowodu zbieżności (bezwzględnej) szeregu potęgowego wewnątrz przedziału zbieżności.

Pozostał przypadek związany z twierdzeniem Abela o ciągłości szeregu potęgowego w końcu przedziału zbieżności. Dla uproszczenia oznaczeń założymy, że promień zbieżności szeregu potęgowego równy jest 1 oraz że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Przy tych założeniach wykażemy, że szereg $\sum a_nx^n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1]$. Wszystkie przypadki można sprowadzić do tego jednego. Przyjmijmy $s_{n,k}=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}&a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots+a_{n+k}x^{n+k}=\\&\qquad=s_{n,1}x^{n+1}+(s_{n,2}-s_{n,1})x^{n+2}+\cdots+(s_{n,k}-s_{n,k-1})x^{n+k}=\\&\qquad\qquad=(1-x)\big(s_{n,1}x^{n+1}+s_{n,2}x^{n+2}+\cdots+s_{n,k-1}x^{n+k-1}\big)+s_{n,k}x^{n+k}\,.\end{aligned}$$

Niech $\varepsilon>0$ będzie dowolną liczbą. Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, więc spełnia warunek Cauchy'ego, więc dla dostatecznie dużych n i dowolnych k zachodzą nierówności $|s_{n+1}|<\varepsilon$, $|s_{n+2}|<\varepsilon$, …, $|s_{n+k}|<\varepsilon$. Stąd, z tego, że $0\le x\le 1$ i z poprzednich równości wynika, że $\left|s_{n,k}x^{n+k}\right|<\varepsilon$ oraz

$$\begin{aligned}&\Big|(1-x)\big(s_{n,1}x^{n+1}+s_{n,2}x^{n+2}+\cdots+s_{n,k-1}x^{n+k-1}\big)\Big|\le\varepsilon(1-x)\big(x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots+x^{n+k-1}\big)=\\&\qquad\qquad=\varepsilon(x^{n+1}-x^{n+k})<\varepsilon\end{aligned}$$

i wobec tego $\left|a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots+a_{n+k}x^{n+k}\right|<2\varepsilon$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu $\sum a_nx^n$ na przedziale $[0,1]$. ■

Twierdzenie o jednostajnej zbieżności szeregu potęgowego, przypadek zespolony

Załóżmy, że $r>0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum a_nz^n$ oraz że szereg $\sum a_nz_0^n$ jest zbieżny i $|z_0|=r$. Niech K oznacza kąt wypukły, którego oba ramiona przecinają wnętrze koła $B(0,r)=\{z\colon\ \ |z|<r\}$. Szereg $\sum a_nz^n$ jest jednostajnie zbieżny $K\cap\overline{B}(z_0,\delta)$, gdzie $\delta>0$ jest dostatecznie małą liczbą dodatnią i $\overline{B}(z_0,\delta)=\{z\colon\ \ |z-z_0|\le\delta\}$ ($\overline{B}(z_0,\delta)$ jest kołem domkniętym o środku z_0 i promieniu $\delta>0$).

Dowód.

Niech $b_n = a_n z_0^n$. Wtedy $\sum a_n z^n = \sum b_n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$. Ponieważ szereg $\sum a_n z_0^n$ jest zbieżny, więc szereg $\sum b_n$ jest zbieżny. Wykażemy, że szereg $\sum b_n z^n$ jest jednostajnie zbieżny w każdym ze zbiorów postaci $\overline{B}(z_0, \delta) \cap K_t$, gdzie $t > 0$ i $K_t = \{z \in \mathbb{C}\colon \quad |\mathrm{Im}\, z| \leq t(\mathrm{Re}\, z - 1) < 1\}$, o ile δ jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Będziemy pisać $z = x + yi$ zakładając, że $x, y \in \mathbb{R}$, czyli że $x = \mathrm{Re}\, z$ i $y = \mathrm{Im}\, z$.

Niech $s_{n,k} = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+k}$. Mamy wtedy

$$b_{n+1}z^{n+1} + b_{n+2}z^{n+2} + \cdots + b_{n+k}z^{n+k} =$$
$$= s_{n,1}z^{n+1} + (s_{n,2} - s_{n,1})z^{n+2} + \cdots + (s_{n,k} - s_{n,k-1})z^{n+k} =$$
$$= (1-z)\big(s_{n,1}z^{n+1} + s_{n,2}z^{n+2} + \cdots + s_{n,k-1}z^{n+k-1}\big) + s_{n,k}z^{n+k}.$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, więc spełnia warunek Cauchy'ego, więc dla dostatecznie dużych n i dowolnych k zachodzą nierówności $|s_{n,1}| < \varepsilon$, $|s_{n,2}| < \varepsilon$, $\ldots$, $|s_{n,k}| < \varepsilon$. Stąd, z tego, że $|z| < 1$ i z poprzednich równości wynika, że $\left|s_{n,k}z^{n+k}\right| < \varepsilon$ oraz

$$\Big|(1-z)\big(s_{n,1}z^{n+1} + s_{n,2}z^{n+2} + \cdots + s_{n,k-1}z^{n+k-1}\big)\Big| \leq \varepsilon|1-z|\big(|z|^{n+1} + |z|^{n+2} + \cdots + |z|^{n+k-1}\big) \leq$$
$$= \varepsilon|1-z|\big(|z|^{n+1} + |z|^{n+2} + \cdots\big) = \varepsilon|z|^{n+1}\tfrac{|1-z|}{1-|z|} \leq \varepsilon\tfrac{|1-z|}{1-|z|} \leq M\varepsilon$$

jeśli w rozpatrywanym zbiorze dla pewnej liczby $M > 0$ zachodzi nierówność $\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq M$. Wobec tego $\left|b_{n+1}z^{n+1} + b_{n+2}z^{n+2} + \cdots + b_{n+k}z^{n+k}\right| < (1+M)\varepsilon$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu $\sum b_n z^n$ w rozpatrywanym zbiorze, o ile w nim jest spełniona nierówność $\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq M$.

Wykażemy teraz, że nierówność ma miejsce. Przyjmijmy, że $k > 0$, $\frac{k^2}{1+k^2} = 1 - \frac{1}{k^2+1} \leq x < 1$ oraz $|y| \leq k(1-x)$. Wtedy $x^2 + y^2 \leq x^2 + k^2(1-x)^2 = (k^2+1)x^2 - 2k^2x + k^2 = (k^2+1)\big[x - \frac{k^2}{k^2+1}\big]^2 + \frac{k^2}{k^2+1} <$ $< (k^2+1)\big[1 - \frac{k^2}{k^2+1}\big]^2 + \frac{k^2}{k^2+1} = 1$. Mamy też $(x-1)^2 + y^2 \leq (1+k^2)(1-x)^2$. Możemy więc napisać $\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}\cdot(1+\sqrt{x^2+y^2})}{1-x^2-y^2} \leq \frac{2(1-x)\sqrt{1+k^2}}{1-x^2-k^2(1-x)^2} = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{1+x-k^2(1-x)} = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{(1+k^2)x+1-k^2} \leq$ $\leq \frac{2\sqrt{1+k^2}}{(1+k^2)\frac{k^2}{1+k^2}+1-k^2} = 2\sqrt{1+k^2} =: M$. Dowód został zakończony. ■

Komentarz do dowodu.

Załóżmy, że $x^2 + y^2 < 1$ i $t = \frac{|y|}{1-x}$. Jeśli M jest taką liczbą, że $M > \frac{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}{1-x^2-y^2} =$ $= \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+x-t|y|} > \frac{t}{2-t|y|} = \frac{-1}{|y|} + \frac{2}{|y|(2-t|y|)}$, to $M|y| + 1 > \frac{2}{2-t|y|}$, więc $2 - t|y| > \frac{2}{M|y|+1}$, zatem

$$\frac{|y|}{1-x} = t < \frac{1}{|y|}\cdot\Big[2 - \frac{2}{M|y|+1}\Big] = \frac{2M}{M|y|+1} \leq 2M := k$$

Wynika z tego, że dla każdej liczby $M > 0$ zbiór tych liczb z, dla których $|z| < 1$ i $\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq M$ jest zawarty w kącie o wierzchołku 1, którego ramiona przecinają wnętrze koła jednostkowego i – jak to wynika z dowodu twierdzenia – zawiera taki kąt.

Zadanie

Wykazać, że jeśli dla pewnego z_1 wyrazy ciągu $(a_n z_1^n)$ są rzeczywiste i tworzą szereg o sumie $+\infty$ i $|z_1|$ jest promieniem zbieżności szeregu $\sum a_n z^n$, to $\lim_{t\to 1^+}\left|\sum a_n (tz_1)^n\right| = \infty$.

Zadanie

Wykazać, że promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{2^n}$ jest równy 1 i że zbiór tych liczb $z \in S^1$,

$S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon \quad |z| = 1\}$, dla których szereg ten jest zbieżny jest gęstym podzbiorem okręgu S^1 oraz jego dopełnienie do S^1 również jest gęste w S^1. Wywnioskować stąd, że suma tego szeregu nie jest ciągła w żadnym punkcie okręgu jednostkowego. ■

Przykład 3

Mamy $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \overset{|x|<1}{=\!=\!=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots\right)'$. Wynika stąd, że jeśli $|x| < 1$, to $\operatorname{arctg} x - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots\right) = \operatorname{arctg} 0 - \left(0 - \frac{1}{3}0^3 + \frac{1}{5}0^5 - \frac{1}{7}0^7 + \cdots\right) = 0$. Funkcja arctg jest ciągła na całej prostej, w szczególności w punkcie 1. Suma szeregu $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[-1,1]$, bo obydwa szeregi $1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{1}{7} \cdot 1^7 + \cdots$ oraz $(-1) - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{5} \cdot (-1)^5 - \frac{1}{7} \cdot (-1)^7 + \cdots$ są zbieżne (szereg $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$ jest rozbieżny poza przedziałem $[-1,1]$). Wynika stąd, że

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg} x = \lim_{x \to 1^-} \left(x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots\right) = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots.$$

Otrzymaliśmy wzór Leibniza, po którego lewej stronie jest $\frac{\pi}{4}$ a po prawej szereg o wymiernych wyrazach. Można by przypuścić, że można go więc użyć do znajdowania przybliżeń dziesiętnych liczby π, ale on akurat się do tego nie nadaje, co wynika z nierówności

$$\frac{1}{4(n+1)} < \left|\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right| < \frac{1}{4n},$$

do której udowodnienia gorąco zachęcam studentów. ■

Zadanie

Sprawdzić, że $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ i zastanowić się, jak można „obliczać” π sprawniej niż za pomocą wzoru Leibniza, np. oszacować wartość bezwzględną różnicy między $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81}$ oraz między $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}$. ■

Twierdzenie Abela – Dirichleta dla jednostajnej zbieżności

Załóżmy, że funkcje f_n i g_n, $n = 0,1,2,\ldots$ są określone na zbiorze D i że dla każdego $x \in D$ ciąg liczbowy $(f_n(x))$ jest nierosnący, $f_n(x) \geq 0$. Jeśli spełnione jest jedno z dwóch założeń:

(i) szereg $\sum g_n$ jest zbieżny jednostajnie na D a funkcja f_1 jest ograniczona,

(ii) sumy szeregu $\sum g_n$ są ograniczone a ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji zerowej,

to szereg $\sum f_n g_n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze D.

Dowód.

Ten dowód to w zasadzie powtórka dowodu jednostajnej zbieżności szeregu potęgowego. Przyjmijmy, że $s_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_n(x)$. Wtedy

$$\left|f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + f_{n+2}(x)g_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)g_{n+k}(x)\right| \leq \Big|\big[f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)\big]\big[s_{n+1}(x) - s_n(x)\big]\Big| +$$
$$+ \Big|\big[f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x)\big]\big[s_{n+2}(x) - s_n(x)\big]\Big| + \cdots + \Big|\big[f_{n+k-1}(x) - f_{n+k}(x)\big]\big[s_{n+k-1}(x) - s_n(x)\big]\Big| +$$
$$+ \Big|f_{n+k}(x)\big[s_{n+k}(x) - s_n(x)\big]\Big|$$

Jeśli spełnione jest któreś z założeń (i), (ii) to $|f_{n+1} - f_{n+2}||s_{n+1} - s_n| \rightrightarrows 0$, $\sup\limits_k f_{n+k}|s_{n+k} - s_n| \rightrightarrows 0$ i $\Big|\big[f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)\big]\big[s_{n+1}(x) - s_n(x)\big]\Big| + \Big|\big[f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x)\big]\big[s_{n+2}(x) - s_n(x)\big]\Big| + \cdots +$

$$+\Big|\big[f_{n+k-1}(x)-f_{n+k}(x)\big]\big[s_{n+k-1}(x)-s_n(x)\big]\Big|+\Big|f_{n+k}(x)\big[s_{n+k}(x)-s_n(x)\big]\Big|\leq$$
$$\leq\Big(|f_{n+1}(x)-f_{n+2}(x)|+|f_{n+2}(x)-f_{n+3}(x)|+\cdots+|f_{n+k-1}(x)-f_{n+k}(x)|\Big)\sup_i|s_{n+i}(x)-s_n(x)|+$$
$$+\Big|f_{n+k}(x)\big[s_{n+k}(x)-s_n(x)\big]\Big|=\Big(|f_{n+1}(x)-f_{n+k}(x)|\Big)\sup_i|s_{n+i}|+\Big|f_{n+k}(x)\big[s_{n+k}(x)-s_n(x)\big]\Big|\rightrightarrows 0$$

Oczywiście ostatnia równość to jedyne miejsce, w którym wykorzystywana jest monotoniczność ciągu (f_n). Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie to w jawny sposób nie pojawiło się na wykładzie, stanowi ono niezłą podstawę do zadania pytania na egzaminie ustnym: łatwe uogólnienie twierdzenia Abela – Dirichleta na przypadek szeregu funkcyjnego.

Jedno z poniższych twierdzeń Dini'ego zostało udowodnione na wykładzie a drugie nie.

Twierdzenie o jednostajnej zbieżności ciągu funkcji monotonicznych

Jeśli funkcje f_n, $n=0,1,2,\ldots$ są monotoniczne, ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji *ciągłej* f na przedziale domkniętym (zbiorze zwartym, tj. takim, ze z każdego ciągu punktów tego zbioru można wybrać podciąg zbieżny do granicy będącej elementem tego zbioru), to ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie.

Twierdzenie Dini'ego o jednostajnej zbieżności ciągu monotonicznego funkcji ciągłych

Jeśli ciąg funkcji ciągłych (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji *ciągłej* f na przedziale domkniętym (zbiorze zwartym) i dla każdego x ciąg $(f_n(x))$ jest monotoniczny, to $f_n\rightrightarrows f$.

Dowód twierdzenia o zbieżności jednostajnej ciągu funkcji monotonicznych.

Załóżmy, że $\varepsilon>0$. Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym, więc jest ciągła jednostajnie. Istnieje więc liczba $\delta>0$ taka, że jeśli $|x-y|<\delta$, to $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Niech punkty $x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k$ będą tak wybrane, że $x_i-x_{i-1}<\delta$, x_0 jest lewym końcem dziedziny funkcji f, a x_k – prawym. Ponieważ ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji f, więc dla dostatecznie dużych n zachodzi $k+1$ nierówności $|f_n(x_i)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$, $i=0,1,2,\ldots,k$. Bez straty ogólności można założyć, że funkcje f_1, $f_2,\ldots$ są niemalejące: w ciągu (f_n) musi wystąpić nieskończenie wiele funkcji niemalejących lub nieskończenie wiele funkcji nierosnących, wystarczy oczywiście rozpatrywać jeden z tych przypadków. Funkcja graniczna f musi również być niemalejąca. Jeśli x jest dowolnym punktem przedziału $[x_0,x_k]$, to dla pewnego i zachodzi nierówność $x_{i-1}\leq x\leq x_i$. Wobec tego $f(x_{i-1})\leq f(x)\leq f(x_i)$ oraz $f_n(x_{i-1})\leq f_n(x)\leq f_n(x_i)$. Zachodzą też nierówności $f(x_{i-1})-\frac{\varepsilon}{3}\leq f_n(x_{i-1})$ oraz $f_n(x_i)\leq f(x_i)+\frac{\varepsilon}{3}$. Stąd wynika, że obie liczby $f(x)$ i $f_n(x)$ znajdują się w przedziale $\big(f(x_{i-1})-\frac{\varepsilon}{3},f(x_i)+\frac{\varepsilon}{3}\big)$, więc odległość między nimi jest mniejsza od jego długości, która jest mniejsza od liczby ε. Dowód został zakończony. ■

Dowód twierdzenia o zbieżności jednostajnej ciągu monotonicznego funkcji ciągłych.

Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa oraz że ciąg (f_n) jest niemalejący. Niech D oznacza dziedzinę rozpatrywanych funkcji. Istnieje więc liczba $\varepsilon>0$ taka, że dla każdego naturalnego n istnieje $m>n$ oraz x_m, dla których $|f_m(x_m)-f(x_m)|\geq\varepsilon$. Ponieważ ciąg (f_n) jest niemalejący, więc dla każdego x

zachodzi nierówność $f_n(x) \le f(x)$. Wobec tego musi być spełniona nierówność $f_m(x_m) \le f(x_m) - \varepsilon$. Z ciągu (x_m) można wybrać podciąg zbieżny do granicy $p \in D$, bo dziedzina funkcji jest przedziałem domkniętym (zbiorem zwartym). By nie komplikować oznaczeń przyjmijmy, że ciąg (x_m) jest zbieżny do p. Jeśli $j \le m$, to mamy $f_j(x_m) \le f_m(x_m) \le f(x_m)$. Stąd i z ciągłości funkcji f_j w punkcie p wynika, że $f_j(p) = \lim\limits_{m\to\infty} f_j(x_m) \le \lim\limits_{m\to\infty} f(x_m) - \varepsilon = f(p) - \varepsilon$. Otrzymana nierówność przeczy oczywiście temu, że $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(p) = f(p)$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie o ciągłości granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego

Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ i wszystkie funkcje f_1, f_2, ... są ciągłe w punkcie p, to również funkcja f jest ciągła w punkcie p.

Dowód.

Załóżmy, że $\varepsilon > 0$. Dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n, dla wszystkich x zachodzi nierówność $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Wybierzmy jedną dostatecznie dużą liczbę naturalną n. Ponieważ funkcja f_n jest ciągła w punkcie p, więc istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x - p| < \delta$, to zachodzi $|f_n(x) - f_n(p)| < \varepsilon$. Mamy więc

$$|f(x) - f(p)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(p)| + |f_n(p) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Oznacza to, że funkcja graniczna f jest ciągła w punkcie p. Dowód został zakończony. ■

Następne twierdzenie różni się tym od poprzednich, że zakładamy jednostajną zbieżność ciągu pochodnych zamiast funkcji, bo inaczej nic sensownego wykazać nie można.

Twierdzenie o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego

Jeśli funkcje f_1, f_2, ... są określone na przedziale *ograniczonym* I, różniczkowalne i $f_n' \rightrightarrows g$, ciąg (f_n) jest zbieżny w punkcie p, to ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f i zachodzi równość $f'(x) = g(x)$ dla każdego $x \in I$.

Dowód.

Wykażemy najpierw, że ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje n_ε takie, że dla każdych $n, k > n_\varepsilon$ i dowolnego x zachodzą nierówności $|f_n'(x) - f_k'(x)| < \varepsilon$ oraz $\big|f_n(p) - f_k(p)\big| < \varepsilon$. Wobec tego

$$|f_n(x) - f_k(x)| \le \Big|f_n(x) - f_k(x) - \big(f_n(p) - f_k(p)\big)\Big| + \big|f_n(p) - f_k(p)\big| =$$
$$= \big|f_n'(c_x) - f_k'(c_x)\big|\big|x - p\big| + \big|f_n(p) - f_k(p)\big| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,.$$

Twierdzenie Lagrange'a zostało tu zastosowane do funkcji $f_n - f_k$! Ciąg $\big(f_n\big)$ jest więc ciągiem Cauchy'ego, zatem jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji f. Funkcja ta jest ciągła jako granica ciągu funkcji ciągłych zbieżnego jednostajnie. Wykażemy, że $f'(x) = g(x)$ dla każdego x. Stosując znów twierdzenie Lagrange'a do różnicy $f_n - f_k$ otrzymujemy dla dostatecznie dużych n i k nierówność $\left|\dfrac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x) - \left(\dfrac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f_k'(x)\right)\right| = \left|f_n'(c_{n,k}) - f_n'(x) - \Big(f_k'(c_{n,k}) - f_k'(x)\Big)\right| < \varepsilon$ – bowiem dla dostatecznie dużych n, k i dowolnego t zachodzi nierówność $\big|f_n'(t) - f_n'(t)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, którą można zastosować w przypadku $t = c_{n,k}$ oraz $t = x$. Ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$ i $\lim\limits_{k\to\infty} f'_k(t) = g(t)$, więc dla dostatecznie dużego n wszystkich $x \in I$ i wszystkich takich h, że $x+h \in I$, zachodzi nierówność $\left|\dfrac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f'_n(x) - \left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right)\right| \le \varepsilon$. Dla ustalonego, dostatecznie dużego n i ustalonego x istnieje $\delta > 0$ taka, że $0 < |h| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f'_n(x)\right| < \varepsilon$, jeśli tylko $x+h \in I$. Stąd wynika, że $0 < |h| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| < 2\varepsilon$ dla tego ustalonego x, jeśli $x+h \in I$. Oznacza to, że $g(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, a to oznacza, że $g(x) = f'(x)$. Dowód został zakończony. ∎

Wykażemy jeszcze jedno twierdzenie mówiące o istnieniu podciągów zbieżnych jednostajnie.

Definicja zbioru zwartego.

1. Zbiór $K \subset \mathbb{R}^k$ nazywany jest zwartym, jeśli z każdego ciągu (x_n) punktów zbioru K można wybrać podciąg (x_{n_k}) zbieżny do granicy $g \in K$.
2. Zbiór $\mathcal{F}$ złożony z funkcji ciągłych określonych na zbiorze K nazywamy zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu (f_n) funkcji ze zbioru $\mathcal{F}$ można wybrać podciąg (f_{n_k}) zbieżny jednostajnie do funkcji $g \in \mathcal{F}$. ∎

Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że każdy przedział domknięty jest zbiorem zwartym. Przedział $[0,2)$ zwarty nie jest bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = 2 \notin [0,2)$, więc wszystkie podciągi ciągu $\left(2-\frac{1}{n}\right)$ są zbieżne do liczby 2, więc ich wspólna granica znajduje się *poza* $[0,2)$. Prosta $\mathbb{R}$ nie jest zbiorem zwartym, bowiem z ciągu (n) nie można wybrać podciągu zbieżnego do liczby rzeczywistej. Zbiór Cantora $\mathbb{C}$ jest zwarty, bowiem z ciągu x_n punktów zbioru $\mathbb{C}$, więc ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny; granica tego podciągu musi leżeć w przedziale $[0,1]$, bo wszystkie wyrazy znajdują się w tym przedziale; nie może się znaleźć ona w przedziale $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, bo w tym przedziale *otwartym* w ogóle nie ma wyrazów ciągu (x_n); analogicznie nie może znaleźć się ona w przedziale $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$, ani w przedziale $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{8}\right)$; proces wykluczania przedziałów, w których granica mogłaby się znaleźć, można kontynuować; wobec tego może ona znaleźć się jedynie w zbiorze Cantora. Te rozumowania można łatwo uogólnić i otrzymać następującą charakteryzację podzbiorów zwartych prostej:

Twierdzenie o zwartych podzbiorach prostej

Zbiór $K \subset \mathbb{R}$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy,gdy jest on ograniczony (tzn. istnieje liczba $d \ge 0$ taka, że $|x| \le d$ dla każdego $x \in K$) i domknięty (tzn. jeśli $x_n \in K$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g \in \mathbb{R}$, to $g \in K$).

Dowód.

Załóżmy najpierw, że zbiór K jest zwarty. Jeśli zbiór K nie jest ograniczony, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje $x_n \in K$ takie, że $|x_n| \ge n$. Z ciągu (x_n) nie można oczywiście wybrać podciągu ograniczonego, więc zbieżnego do granicy skończonej. Jeśli zbiór K nie jest domknięty, to zawiera ciąg (x_n), którego granica g znajduje się poza K. Wszystkie podciągi ciągu (x_n) są więc zbieżne go $g \notin K$. Dowodzi to, że zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}$ jest domknięty i ograniczony.

Teraz załóżmy, że zbiór K jest domknięty i ograniczony i że wyrazy ciągu (x_n) są jego elementami. Z wyrazów ciągu ograniczonego (x_n) można wybrać podciąg zbieżny (x_{n_k}) (twierdzenie Bolzano–Weierstrassa). Jego granica musi się znajdować w zbiorze K, bowiem zbiór ten jest z założenia domknięty, a wyrazy ciągu (x_{n_k}) są elementami K. Wobec tego zbiór K jest zwarty. ∎

Jeśli $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, to definiujemy $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}$. Bez trudu można sprawdzić, że $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, $\|t\mathbf{x}\| = |t| \cdot \|\mathbf{x}\|$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, i $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$. Liczbę $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ nazywać będziemy odległością punktów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Liczba $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\|$ to odległość punktu $\mathbf{x}$ od punktu $\mathbf{0}$, nazywać ją będziemy normą punktu $\mathbf{x}$. Norma, o której tu mówimy jest jedną z kilku używanych w analizie. Odległość zdefiniowana z jej pomocą to „zwykła” odległość (w przypadku $k = 1, 2, 3$).

Definicja zbiorów otwartych i domkniętych w $\mathbb{R}^k$

1. Zbiór $G \subseteq \mathbb{R}^k$ nazywamy otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p} \in G$ istnieje liczba $r > 0$ taka, że jeśli $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r$, to $\mathbf{x} \in G$.
2. Zbiór $F \subseteq \mathbb{R}^k$ nazywamy domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy z tego, że $\mathbf{p}_n \in F$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}$ wynika, że $\mathbf{p} \in F$. ∎

Niech $B(p, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\}$. Zbiór ten nazywany jest kulą otwartą o środku $\mathbf{p}$ i promieniu r. Wykażemy, że jest to zbiór otwarty. Niech $\mathbf{q} \in B(\mathbf{p}, r)$ i niech $\varrho = r - \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| > 0$. Jeśli $\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| < \varrho$, to $\|x - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \varrho + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = r$, zatem $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, r)$, co kończy dowód otwartości kuli otwartej $B(\mathbf{p}, r)$. Czytelnik udowodni bez trudu, że przedział otwarty jest otwartym podzbiorem prostej, natomiast odcinek bez końców nie jest otwartym podzbiorem płaszczyzny, ani przestrzeni trójwymiarowej. Oczywiście zbiór pusty jest otwarty i jednocześnie domknięty. Ta sama własność przysługuje całej przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Odcinek domknięty, prosta to przykłady zbiorów domkniętych. Każdy zbiór skończony jest domknięty. Dopełnienie zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym i odwrotnie.

Zadanie

Wykazać, że otwarty podzbiór prostej jest sumą przeliczalnej lub skończonej rodziny przedziałów parami rozłącznych. (to twierdzenie nie ma odpowiednika na płaszczyźnie)

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^k$ nazywamy ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $d > 0$ taka, że jeśli $\mathbf{x} \in A$, to $\|\mathbf{x}\| \leq d$.

Zbiory zwarte w przestrzenie $\mathbb{R}^k$ można łatwo scharakteryzować.

Twierdzenie o zwartych podzbiorach przestrzeni $\mathbb{R}^k$

Zbiór $K \subseteq \mathbb{R}^k$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy K jest domknięty i ograniczony.

Dowód.

Przeprowadzimy dowód w przypadku $k = 2$. Udowodnimy, że jeśli K jest zwarty, to jest ograniczony. Załóżmy, że tak nie jest. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje wtedy punkt $\mathbf{p}_n \in K$ taki, że $\|\mathbf{p}_n\| > n$. Załóżmy, że udało nam się wybrać podciąg $(\mathbf{p}_{n_j})$ ciągu $(\mathbf{p}_n)$ zbieżny do punktu $\mathbf{p} \in K$. Mamy więc

$\lim\limits_{j\to\infty}\|\mathbf{p}_{n_j}-\mathbf{p}\|=0$ oraz $n_j<\|\mathbf{p}_{n_j}\|\le\|\mathbf{p}_{n_j}-\mathbf{p}\|+\|\mathbf{p}\|\xrightarrow[j\to\infty]{}\|\mathbf{p}\|$, co jest niemożliwe, bo $\lim\limits_{j\to\infty}n_j=\infty$. Teraz wykażemy, że K jest zbiorem domkniętym. Załóżmy, że tak nie jest. Istnieje wtedy ciąg $(\mathbf{p}_N)$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{p}_n=\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_n\in K$ dla każdego n, ale $\mathbf{p}\notin K$. Wtedy jednak wszystkie podciągi ciągu $(\mathbf{p}_n)$ są zbieżne do $\mathbf{p}\notin K$ wbrew temu, że z podciągu $(\mathbf{p}_n)$ można wybrać podciąg zbieżny do elementu zbioru K.

Załóżmy teraz, że zbiór K jest domknięty i ograniczony. Wykażemy, że jest on zwarty. Niech $(\mathbf{p}_n)$ będzie ciągiem punktów zbioru K. Niech d będzie taką liczbą, że $\|\mathbf{x}\|\le d$ dla każdego $\mathbf{x}\in K$. Niech $\mathbf{p}_n=(x_n,y_n)$. Mamy $|x_n|\le\sqrt{x_n^2+y_n^2}=\|p_n\|\le d$. Analogicznie $|y_n|\le d$. Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że z ciągu (x_n) można wybrać podciąg zbieżny (x_{n_j}). Niech $x=\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_j}$. Ciąg (y_{n_j}) jest ograniczony, więc można zeń wybrać podciąg zbieżny, np. $(y_{n_{j_m}})$. Niech $y=\lim\limits_{m\to\infty}y_{n_{j_m}}$. Ponieważ podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy co ciąg, więc $x=\lim\limits_{m\to\infty}x_{n_{j_m}}$. Wynika stąd, że $\mathbf{p}:=(x,y)=\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{p}_{n_{j_m}}$. Mamy bowiem $\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_{n_{j_m}}\|\le$ $\le|x-x_{n_{j_m}}|+|y-y_{n_{j_m}}|\xrightarrow[m\to\infty]{}0$. Punkt $\mathbf{p}$ jest granicą ciągu punktów ze zbioru *domkniętego* K, więc $\mathbf{p}\in K$, co kończy dowód zwartości zbioru K. $\blacksquare$

Twierdzenie to w takiej dosłownie wersji nie jest prawdziwe w przypadku zbiorów, których elementami są funkcja ciągłe. Niech bowiem $\mathcal{F}=\{f_n\colon\ n=1,2,3,\ldots\}$, $f_n(x)=\sin\left(2^n x\right)$. Jasne jest, że jeśli $n\ne k$, to $\sup\limits_{x\in K}|f_n(x)-f_k(x)|\ge1$, zatem z ciągu (f_n) nie można wybrać podciągu zbieżnego jednostajnie.

Definicja jednakowej jednostajnej ciągłości.

Funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje liczba $\delta>0$ taka, że jeśli $|x_1-x_2|<\delta$ to dla każdej funkcji $f\in\mathcal{F}$ zachodzi nierówność $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. $\blacksquare$

Liczba δ dobrana do ε jest więc taka sama dla wszystkich funkcji z rodziny $\mathcal{F}$. W przykładzie poprzedzającym definicję mamy do czynienia z rodziną funkcji, które nie są jednakowo jednostajnie ciągłe. Wykażemy teraz twierdzenie charakteryzujace zbiory zwarte, których elementami są funkcje ciągłe określone na zbiorze zwartym $K\subset\mathbb{R}$ ($K\subset\mathbb{C}$).

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego*

Zbiór $\mathcal{F}$ złożony z funkcji ciągłych określonych na zbiorze zwartym K jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równocześnie następujące warunki:

A-A1. istnieje liczba $M\ge0$ taka, że dla każdego $x\in K$ i każdej funkcji $f\in\mathcal{F}$ zachodzi nierówność $|f(x)|\le M$, czyli funkcje ze zbioru $\mathcal{F}$ są wspólnie ograniczone;

A-A2. funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe, tzn.

$$(\forall_{\varepsilon>0})(\exists_{\delta>0})(\forall_{f\in\mathcal{F}})(\forall_{x_1,x_2\in K})\ |x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon;$$

A-A3. rodzina $\mathcal{F}$ jest domknięta, tzn. jeśli $(\forall_n)f_n\in\mathcal{F}$ i $f_n\rightrightarrows f$ na zbiorze K, to $f\in\mathcal{F}$.

* Wg. mojej wiedzy każdy z dwóch panów udowodnił jedną implikację.

Dowód.

Załóżmy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest zwarta oraz że funkcje z $\mathcal{F}$. nie są wspólnie ograniczone. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje więc funkcja $f_n \in \mathcal{F}$ taka, że $\sup\limits_{x\in K} |f_n(x)| \geq n$. Z ciągu (f_n) nie można wybrać podciągu zbieżnego jednostajnie do funkcji ciągłej f, bo funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest ograniczona (twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów) a z nierówności $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ wynika, że $|f_n(x)| < |f(x)| + \varepsilon$, zatem $n = \sup\limits_{x\in K} |f_n(x)| \leq \sup\limits_{x\in K} |f(x)| + \varepsilon$, co jest niemożliwe. Wobec tego funkcje te muszą być wspólnie ograniczone.

Załóżmy teraz, że rodzina $\mathcal{F}$ nie jest domknięta, tzn. że istnieje ciąg (f_n) zbieżny jednostajnie do funkcji $f \notin \mathcal{F}$. Wtedy z ciągu f_n nie można wybrać pociągu zbieżnego jednostajnie do granicy należącej do $\mathcal{F}$, bo wszystkie podciągi zbieżne jednostajnie tego ciągu są zbieżne jednostajnie do $f \notin \mathcal{F}$. Dowodzi to, że rodzina $\mathcal{F}$ musi być domknięta. Te dwa fragmenty rozumowania niczym się nie różnią od dowodów w twierdzeniu o podzbiorach zwartych prostej.

Ostatnia rzecz, którą należy wykazać to jednakowa jednostajna ciągłość funkcji z rodziny $\mathcal{F}$. Załóżmy, że funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ nie są jednakowo jednostajnie ciągłe. Oznacza to, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje funkcja f_n oraz punkty x_n, y_n takie, że $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Wybieramy podciąg zbieżny z ciągu (x_n). Nie zastępujemy x_n przez x_{n_l}, by nie komplikować oznaczeń, ale w dalszym ciągu rozpatrywane są odpowiednie podciągi ciągu (y_n) i ciągu (f_n). Ze zbieżności ciągu (x_n) do $\hat{x} \in K$ wynika, że również $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \hat{x}$. Wybieramy teraz podciąg zbieżny jednostajnie z ciągu (f_n) do funkcji $f \in \mathcal{F}$. Znów zachowujemy oznaczenia. Teraz mamy $f_n \rightrightarrows f$, czyli $\sup |f_n - f| \to 0$ oraz $x_n \to \hat{x}$, $y_n \to \hat{x}$. Mamy więc

$$\varepsilon \leq |f_n(x_n) - f_n(y_n)| \leq |f_n(x_n) - f(\hat{x})| + |f(\hat{x}) - f_n(y_n)| \leq 2 \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0\,.$$

Jest to niemożliwe, zatem funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ muszą być jednakowo jednostajnie ciągłe.

Założymy teraz, że rodzina $\mathcal{F}$ spełnia warunki A-A1, A-A2 i A-A3. Niech $f_n \in \mathcal{F}$. Wykażemy, że z ciągu (f_n) można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie. Istnieje zbiór przeliczalny $D \subset K$ taki, że każdy punkt zbioru K jest granicą pewnego ciągu punktów z D (D jest gęsty w zbiorze K, w przypadku, gdy K jest przedziałem zbiór D może się składać np. ze wszystkich liczb wymiernych z tego przedziału). Oznaczmy elementy zbioru D przez x_1, x_2, ... Z ciągu ograniczonego $(f_n(x_1))$ można wybrać podciąg zbieżny $(f_{1,n}(x_1))$, tzn. z ciągu (f_n) można wybrać podciąg $(f_{1,n})$ w taki sposób, że ciąg $(f_{1,n}(x_1))$ jest zbieżny. Z ciągu $(f_{1,n})$ można z kolei wybrać podciąg $(f_{2,n})$ taki, że ciąg $(f_{2,n}(x_2))$ jest zbieżny. Ponieważ podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny, więc ciąg $(f_{2,n}(x_1))$ jest zbieżny. Teraz z ciągu $(f_{2,n})$ wybieramy podciąg $(f_{3,n})$ tak, by ciąg $(f_{3,n}(x_3))$ był zbieżny. Wobec tego zbieżne są ciągi $(f_{3,n}(x_1))$, $(f_{3,n}(x_2))$, $(f_{3,n}(x_3))$. Tę procedurę można kontynuować, czyli z otrzymanego ciągu funkcji wybierać podciąg zbieżny w następnym punkcie zbioru D. Teraz zajmiemy się ciągiem $f_{n,n}$. Jego wyrazy, z wyjątkiem pierwszych $n-1$ są wyrazami, na ogół niekolejnymi, ciągu $f_{n,1}, f_{n,2}, f_{n,3}, \ldots$. Wobec tego ciąg $(f_{n,n}(x_j))$ jest zbieżny dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Udało się nam więc wybrać z ciągu (f_n)

podciąg $(f_{n,n})$, który jest zbieżny w każdym punkcie zbioru gęstego D. Wykażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na zbiorze zwartym K. Niech ε oznacza liczbę dodatnią. Istnieje wtedy $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x-y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$. Istnieje liczba m, zależna od δ taka, że dla każdego punktu $x \in K$ istnieje $j(x) \in \{1, 2, \ldots, m\}$ taka, że $|x - x_{j(x)}| < \delta$. Istnieje też liczba n_ε taka, że jeśli $k, l > n_\varepsilon$, to $|f_{k,k}(x_j) - f_{l,l}(x_j)| < \varepsilon$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Mamy zatem

$$|f_{k,k}(x) - f_{l,l}(x)| \le |f_{k,k}(x) - f_{k,k}(x_{j(x)})| + |f_{k,k}(x_{j(x)}) - f_{l,l}(x_{j(x)})| + |f_{l,l}(x_{j(x)}) - f_{l,l}(x)| < 3\varepsilon$$

Wykazaliśmy więc, że jest spełniony jednostajny warunek Cauchy'ego, co oznacza, że ciąg $f_{n,n}$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji f, która ze względu na domkniętość zbioru $\mathcal{F}$ jest jego elementem. Dowód zwartości rodziny $\mathcal{F}$ został zakończony. ■

Przejdziemy teraz do bardzo użytecznego z wielu przyczyn twierdzenia.

Twierdzenie Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami

Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i dla każdej funkcji ciągłej $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ istnieje wielomian W taki, że $|F(x) - W(x)| < \varepsilon$ dla każdego punktu $x \in [a,b]$, czyli każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów.

Dowód. (Bernstein).

Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia. Wybieramy ten, bo ma on swą oczywistą genezę w twierdzeniu z rachunku prawdopodobieństwa i jeśli ktoś do niego wtedy wróci, np. dlatego, że będzie on tam powtórzony przy okazji prawa wielkich liczb, to będzie mu łatwiej pojąć, o co w tym wszystkim chodzi.

Wystarczy udowodnić twierdzenie w przypadku $[a,b] = [0,1]$. By się z tym pogodzić wystarczy przyjąć, że $t = \frac{x-a}{b-a}$, $f(t) = F\big(a + t(b-a)\big) = F(x)$ i analogicznie $w(t) = W\big(a + t(b-a)\big) = W(x)$. Jasne jest, że wtedy $|f(t) - w(t)| = |F(x) - W(x)|$, przy czym $a \le x \le b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \le t \le 1$.

Niech $b_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$. Wielomian b_n nazywany jest n–tym wielomianem Bernsteina funkcji f. Wykażemy, że jeśli liczba n jest dostatecznie duża, to przyjęcie $w(t) = b_n(t)$ powoduje, że dla każdego $t \in [0,1]$ zachodzi nierówność $|f(t) - w(t)| = |f(t) - b_n(t)| < \varepsilon$.

Zaczniemy od pomocniczych równości.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1 \tag{W1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt \tag{W2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k k^2 (1-t)^{n-k} = n(n-1)t^2 + nt \tag{W3}$$

$$\forall_{\delta>0} \sum_{\left|\frac{k}{n} - t\right| \ge \delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \le \frac{1}{n} \cdot \frac{t(1-t)}{\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2} \tag{W4}$$

Równość (W1) wynika natychmiast z tego, że $1 = \big(t + (1-t)\big)^n = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.

Równość (W2) podobnie: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} t^{k-1}(1-t)^{n-1-(k-1)} =$

$$= nt\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} = nt\big(t + (1-t)\big)^{n-1} = nt\,.$$

Kolej na (W3). $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} =$

$$= n(n-1)t^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} t^{k-2}(1-t)^{n-2-(k-2)} + nt = n(n-1)t^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} t^k (1-t)^{n-2-k} + nt =$$

$$= n(n-1)t^2\big(t + (1-t)\big)^{n-2} + nt = n(n-1)t^2 + nt\,.$$

Teraz kolej na najważniejszą z tych czterech równości, zwana nierównością Czebyszewa (w przypadku ogólniejszym, na omówienie którego tu nie ma miejsca).

$$n^2\delta^2 \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geq\delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geq\delta} \big(k - nt\big)^2\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} < \sum_{k=0}^{n}\big(k - nt\big)^2\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} - 2\sum_{k=0}^{n} knt\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\big(nt\big)^2\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} =$$

$$= n(n-1)t^2 + nt - 2n^2t^2 + n^2t^2 = nt - nt^2 = nt(1-t)$$

Z otrzymanej nierówności łatwo wynika, że

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geq\delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{nt(1-t)}{n^2\delta^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{t(1-t)}{\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}\,.$$

Jesteśmy gotowi do dowodu. Ponieważ f jest ciągła na przedziale *domkniętym*, więc istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeśli $|t - s| < \delta$, to $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dzięki (W1) mamy teraz

$$\big|f(t) - b_n(t)\big| = \left|f(t) - \sum_{k=0}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\big(f(t) - f\big(\tfrac{k}{n}\big)\big)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|<\delta} \big|f(t) - f\big(\tfrac{k}{n}\big)\big|\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geq\delta} \big|f(t) - f\big(\tfrac{k}{n}\big)\big|\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|<\delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + 2M\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geq\delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{1}{4n\delta^2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}$$

Jeśli $n > \dfrac{M}{\varepsilon\delta^2}$, to otrzymujemy $\big|f(t) - b_n(t)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dowód został zakończony. ∎

Krótki komentarz probabilistyczny.

Załóżmy, że w Nibylandii (pozdrowienia od Piotrusia Pana) wyprodukowano monetę niecałkiem symetryczną: rzucając nią otrzymujemy reszkę z prawdopodobieństwem t a drugą stronę z mało czytelną podobizną jakiegoś fruwającego stworzenia – z prawdopodobieństwem $1-t$. Prawdopodobieństwo uzyskania w n rzutach tą monetą dokładnie k–reszek równe jest więc $\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$. Wobec tego liczba $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt$ oznacza średnia liczbę reszek otrzymanych w k rzutach tą monetą. Oczekujemy więc, że rzucając tą monetą n razy otrzymamy nt, a raczej około nt, reszek. Wzór (W4) wyjaśnia, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba rzutów (k), w których wypadła reszka będzie różnić się od oczekiwanej (nt) o pewien ustalony procent liczby rzutów lub bardziej, dlatego zajmujemy się tam różnicą $\left|\frac{k}{n}-t\right|$ (nierówność $\left|\frac{k}{n}-t\right| \geq \delta$ równoważna jest temu, że $|k-nt| \geq \delta n$, ta ustalona część n to δn), prawdopodobieństwo to dąży do 0 – jest to tzw. słabe prawo wielkich liczb. Liczba $b_n(t)$ jest więc średnią liczb $f\left(\frac{k}{n}\right)$, ta średnia jest mniej więcej równa $f(t)$, bo na ogół $\frac{k}{n} \approx t$. Powinna więc mieć miejsce równość przybliżona $f(t) \approx b_n(t)$. W końcówce nie jesteśmy całkiem precyzyjni, ale wcześniej staraliśmy się wyjaśnić precyzyjnie, o co nam chodzi. ■

Wniosek

Dla każdej funkcji ciągłej $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ istnieje ciąg wielomianów niemal jednostajnie zbieżny do f, tzn. jednostajnie zbieżny na każdym zbiorze zwartym zawartym w przedziale (a,b). Ta sama teza jest prawdziwa również dla funkcji określonych na przedziałach otwarto–domkniętych i na przedziałach domknięto–otwartych.

Dowód.

Niech $(a-n)$ będzie nierosnącym ciągiem zbieżnym do a, (b_n) — niemalejącym ciągiem zbieżnym do b i niech $a < a_1 < b_1 < b$. Mamy więc $[a_1,b_1] \subseteq [a_2,b_2] \subseteq \ldots [a_n,b_n] \subseteq \ldots$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=(a,b)$. Niech w_n będzie takim wielomianem, że dla każdego $x \in [a_n,b_n]$ zachodzi nierówność $|w_n(x)-f(x)| < \frac{1}{n}$. Jeśli C jest zwartym podzbiorem przedziału (a,b), to istnieje liczba naturalna k taka, że $C \subseteq [a_k,b_k]$. Jasne jest, że dla $n \geq k$ i $x \in [a_k,b_k]$ zachodzi nierówność $|w_n(x)-f(x)| < \frac{1}{n}$. Wynika stąd jednostajna zbieżność ciągu (w_n) na przedziale $[a_k,b_k]$, więc tym bardziej na zbiorze C. Jest jasne, że to samo rozumowanie można zastosować do przedziałów domknięto–otwartych i otwarto–domkniętych. ■

Twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej

Jeśli $f:P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą określoną na przedziale P (otwartym, domkniętym, domknięto–otwartym lub otwarto–domkniętym), to istnieje funkcja $F:P \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla każdej liczby $x \in P$ zachodzi równość $F'(x)=f(x)$ (funkcja F nazywana jest funkcją pierwotną funkcji f).

Dowód.

Niech p będzie dowolnym punktem przedziału P. Istnieje ciąg wielomianów (w_n) niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f (zob. wniosek). Niech W_n oznacza wielomian taki, że $W_n'(x)=w_n(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $W_n(p)=0$. Taki wielomian W_n istnieje: jeśli $w_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$, to przyjmujemy

$$W_n(x)=a_0x+\tfrac{1}{2}a_1x^2+\tfrac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\tfrac{1}{m+1}a_mx^{m+1}-\left[a_0p+\tfrac{1}{2}a_1p^2+\tfrac{1}{3}a_2p^3+\cdots+\tfrac{1}{m+1}a_mp^{m+1}\right].$$

Z twierdzenia o różniczkowalności ciągu funkcyjnego wynika od razu, że ciąg (W_n) jest niemal jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji F, przy czym $F'(x)=f(x)$ dla każdego $x \in P$. Stosujemy to twierdzenie do każdego z przedziału wstępującego ciągu przedziałów ograniczonych, których sumą jest cały przedział P. ■

Zadanie

Niech $w_0(x) = 0$, $w_{n+1}(x) = w_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - w_n(x)^2\big)$ dla $x \in [-1,1]$. Niech $f(x) = |x|$. Wykazać, że ciąg (w_n) jest niemalejącym ciągiem wielomianów jednostajnie zbieżnym do funkcji $|x|$. ■

Zadanie

Wykazać, że każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych.

Funkcja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwana jest przedziałami liniową, jeśli jest ciągła i istnieją punkty* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ *takie, że na każdym z przedziałów* $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ *funkcja* f *jest afiniczna, czyli jest postaci* $\alpha x + \beta$.

Zadanie

Wykazać, że każda funkcja przedziałami liniowa jest kombinacją liniową funkcji postaci $|x - c|$.

Zadanie

Podać dowód twierdzenia Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłej wielomianami w oparciu o trzy poprzednie zadania.

Podamy teraz przykład funkcji ciągłej, która nie ma skończonej pochodnej w żadnym punkcie. Przykłady tego typu zostały podane w XIX wieku: Bolzano wymyślił, ale nie opublikował, a potem niezależnie od niego Weierstrass. Przykład , który omówimy poniżej jest wzorowany na idei Weierstrassa. Pozwala on zorientować się jak tego rodzaju funkcje mogą powstawać. Niebagatelne znaczenie ma też to, że tego rodzaju funkcje pojawiają się w niektórych modelach matematycznych zjawisk fizycznych.

Przykład van der Waerdena funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej

Niech $u(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ dla $0 \leq x \leq 1$ i niech $u(x+1) = u(x)$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. Niech $u_n(x) = 4^{-n}u(4^n x)$. Definiujemy funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ za pomocą wzoru $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Szereg $\sum u_n$ jest jednostajnie zbieżny na całej prostej, bo $|u_n(x)| \leq 4^{-n}$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ i oczywiście $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = \frac{4}{3} < \infty$. Wobec tego, że funkcje $u_0, u_1, \ldots$ są ciągłe, funkcja f jest ciągła. Wykażemy, że nie ma ona skończonej pochodnej w żadnym punkcie (jednostronne nieskończone ma w wielu punktach).

Ustalmy x oraz n. Niech h_n będzie taką liczbą, że na przedziale $P_{x,n}$ o końcach x, $x+h_n$ funkcja u_n jest monotoniczna i $|h_n| = 4^{-n-1}$. Oznacza to, że między punktami x i $x+h_n$ nie m,a ani jednego punktu postaci $\frac{p}{2} \cdot 4^{-n}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$. Wynika stąd, że jeśli $k \leq n$, to funkcja u_k jest monotoniczna na przedziale $P_{x,n}$. Jasne jest też, że $\frac{u_k(x+h_n) - u_k(x)}{h_n} = \pm 1$. Jeśli $k > n$, to $u_k(x+h_n) = u_k(x)$, bo okresem funkcji u_k jest liczba 4^{-k}, więc liczba $4^{-n} = 4^{k-n} \cdot 4^{-k}$ jako wielokrotność okresu jest też okresem funkcji u_k. Stąd wynika, że iloraz $\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$ jest sumą $n+1$ składników, z których każdy równy jest ± 1, więc jest liczbą nieparzystą, gdy n jest parzyste i parzystą, gdy n jest nieparzyste. Wynika stąd, że różnica między kolejnymi wyrazami ciągu $\left(\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}\right)$ ma wartość bezwzględną nie mniejszą niż 1, więc ciąg ten nie ma granicy skończonej. Wykazaliśmy, że jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x, to ta pochodna jest nieskończona. ■

Uwaga

A.S.Besicovitch podał przykład funkcji ciągłej, która w żadnym punkcie nie ma ani jednej pochodnej jednostronnej (ani skończone ani nieskończonej). ■