**Analiza 1, część czwarta**

**Kryterium Abela – Dirichleta**

Niech $(a_n)$ będzie malejącym ciągiem liczb dodatnich.

**D.** Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i ciąg sum częściowych szeregu $\sum b_n$ jest ograniczony, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

**A.** Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n b_n$ też jest zbieżny.

**Dowód.**

Niech $s_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Zachodzi równość

$a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+k}b_{n+k} = (s_{n+1} - s_n)a_{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1})a_{n+2} + \cdots + (s_{n+k} - s_{n+k-1})a_{n+k} =$
$= (s_{n+1} - s_n)(a_{n+1} - a_{n+2}) + (s_{n+2} - s_n)(a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots + (s_{n+k-1} - s_n)(a_{n+k-1} - a_{n+k}) + a_{n+k}(s_{n+k} - s_n)$.

Jeśli $|s_j| \leq M$ dla każdej liczby $j \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$, to $|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+k}b_{n+k}| \leq$
$\leq 2M\big(|a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}|\big) + 2Ma_{n+k} = 2Ma_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, zatem spełniony jest warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu $\sum a_n b_n$, co kończy dowód twierdzenia w przypadku Abela.

Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny a $\varepsilon$ jest liczbą dodatnią, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ nierówność $|s_{n+j} - s_n| < \varepsilon$ zachodzi dla $j = 1, 2, \ldots$ (warunek Cauchy'ego). Wobec tego

$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+k}b_{n+k}| \leq \varepsilon\big(|a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}|\big) + \varepsilon a_{n+k} =$
$= \varepsilon a_{n+1}$.

Wynika stąd od razu, że szereg $\sum a_n b_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny. ■

**Przykład 1.**

Dla każdej liczby $z \neq 1$ takiej, że $|z| = 1$ szereg $\sum \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny. Wynika to z kryterium Dirichleta, bowiem ciąg $\big(z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\big)$, czyli ciąg $\left(\frac{z - z^n}{1 - z}\right)$ jest ograniczony przez $\frac{2}{|1-z|}$ a ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest malejący i zbieżny do $0$. ■

**Przykład 2.**

Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdej liczby $a \in \mathbb{C}$, jeśli $|z| < 1$. Zachodzi bowiem wzór $\left|\frac{\binom{a}{n+1}z^{n+1}}{\binom{a}{n}z^n}\right| = \left|\frac{a-n}{n+1} \cdot z\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z| < 1$. Niech $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n$, $z$ jest teraz ustaloną liczbą zespoloną, której wartość bezwzględna jest *mniejsza* niż 1. Z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów wynika, że prawdziwy jest wzór

$$f(a)f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j}\binom{b}{n-j} \Big) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+b}{n} z^n = f(a+b),$$

bowiem $\sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j}\binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$. Wykażemy, że ta równość jest prawdziwa dla dowolnych liczb zespolonych $a, b$. Gdy $a$ i $b$ są liczbami naturalnymi większymi od $n$, bo $(1+x)^a \cdot (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$, zatem współczynniki po obu stronach przy $x^n$ otrzymane po podniesieniu do potęg i wymnożeniu są równe. Obie strony równości $\sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j}\binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$ można potraktować jako wielomiany zmiennej $a$, stopnia $\leq n$, ich wartości pokrywają się w nieskończenie wielu punktach, zatem te wielomiany są równe. Wobec tego $\sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j}\binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$ dowolnego $a \in \mathbb{C}$, o ile $b$ jest liczbą naturalną $> n$. Teraz traktujemy obie stron jako wielomiany zmiennej $b$, liczbę $a$ ustalamy. Znów obie strony są wielomianami stopnia $\leq n$, których wartości pokrywają się w nieskończenie wielu punktach ( $b > n$, naturalne) i wobec tego pokrywają się zawsze.* ■

Wykażemy teraz twierdzenie, z którego wynika między innymi, że jeśli iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów jest zbieżny, to jego sumą jest iloczyn sum mnożonych szeregów. Niech $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ oraz $b_0+b_1+b_2+\cdots$ będą szeregami zbieżnymi. Niech $c_n = a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$. Oznaczmy sumy częściowe częściowe tych szeregów przez : $A_n = a_0+a_1+\cdots+a_n$, $B_n = b_0+b_1+\cdots+b_n$ oraz $C_n = c_0+c_1+\cdots+c_n$. Ciąg $(C_n)$ nie musi mieć granicy, ma ją jeśli np. co najmniej jeden z szeregów $\sum a_n$, $\sum b_n$ jest zbieżny bezwzględnie. Jednak zawsze zachodzi

**Twierdzenie Cesàro**.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}(C_0+C_1+\cdots+C_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \,.$$

**Dowód.**

Mamy $C_n = a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0) + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots a_nb_0) =$

$$= a_0(b_0+b_1+\cdots+b_n) + a_1(b_0+b_1+\cdots+b_{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(b_0+b_1) + a_nb_0 =$$

$$= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_{n-1}B_1 + a_nB_0$$

i wobec tego $\quad C_0+C_1+\cdots+C_n =$

$$= a_0B_0 + (a_0B_1+a_1B_0) + (a_0B_2+a_1B_1+a_2B_0) + \cdots + (a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_{n-1}B_1 + a_nB_0) =$$

$$= B_0(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n) + B_1(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n) + \cdots + B_na_0 =$$

$$= B_0A_n + B_1A_{n-1} + B_2A_{n-2} + \cdots + B_nA_0 \,.$$

Niech $\varepsilon > 0$. Niech $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ i niech $M > 0$ będzie taką liczbą, że dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzą nierówności $|a_0+a_1+\cdots+a_n| \le M$, $|b_0+b_1+\cdots+b_n| \le M$. Niech $n_\varepsilon$ będzie taką liczbą naturalną, że dla $n \ge n_\varepsilon$ zachodzą nierówności $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{4M}$ i $|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Niech wreszcie $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ będzie liczbą naturalną tak dużą, że dla $n \ge m_\varepsilon$ zachodzi nierówność $\frac{8M^2n_\varepsilon}{\varepsilon} - 1 < n$, czyli $\frac{2M^2n_\varepsilon}{n+1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Wtedy dla dowolnych numerów $i,j$ zachodzą nierówności $|A_iB_j - AB| \le |A_i|\cdot|B_j| + |A|\cdot|B| \le 2M^2$. Jeśli zaś $i \ge m_\varepsilon$ oraz $j \ge m_\varepsilon$, to $|A_iB_j - AB| \le |A_i - A|\cdot|B_j| + |A|\cdot|B_j - B| < \frac{\varepsilon}{4M}\cdot M + M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd zaś wynika, że

$$\left|\frac{1}{n+1}(A_0B_n + A_1B_{n-1} + \cdots + A_{n-1}B_1 + A_nB_0) - AB\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n+1}(|A_0B_n - AB| + |A_1B_{n-1} - AB| + \cdots + |A_{n-1}B_1 - AB| + |A_nB_0 - AB|) \le$$

$$\le \frac{1}{n+1}(|A_0B_n - AB| + |A_1B_{n-1} - AB| + \cdots + |A_{n_\varepsilon-1}B_{n-n_\varepsilon+1} - AB|) +$$

$$+ \frac{1}{n+1}(|A_{n_\varepsilon}B_{n-n_\varepsilon} - AB| + |A_{n_\varepsilon+1}B_{n-n_\varepsilon-1} - AB| + \cdots + |A_{n-n_\varepsilon}B_{n_\varepsilon} - AB|) +$$

$$+ \frac{1}{n+1}(|A_{n-n_\varepsilon+1}B_{n_\varepsilon-1} - AB| + \cdots + |A_{n-1}B_1 - AB| + |A_nB_0 - AB|) <$$

* Można to też wykazać bezpośrednio, np. indukcyjnie, do czego zachęcam tych, którzy zbyt wprawni w rachunkach nie są i na dokładkę nie dowierzają abstrakcyjnym rozumowaniom, jednak do tych rozumowań trzeba się powoli przyzwyczajać, bo bez nich trudno zrozumieć matematykę.

$$< \frac{n_\varepsilon}{n+1}\cdot 2\cdot M^2 + \frac{n+1-2n_\varepsilon}{n+1}\cdot\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n_\varepsilon}{n+1}\cdot 2\cdot M^2 < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.$$

Wykazaliśmy więc, że jeśli $n$ jest dostatecznie duże ( $n > m_\varepsilon$ ), to

$$\left|\frac{1}{n+1}\left(C_0 + C - 1 + \cdots + C_{n-1} + C_n\right) - AB\right| < \varepsilon\,,$$

a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(C_0 + C - 1 + \cdots + C_{n-1} + C_n\right) = AB$ . ∎

Teraz znów zajmiemy się funkcją wykładniczą o zespolonym wykładniku. Najpierw uogólnimy nieco twierdzenie o jednoznaczności funkcji wykładniczej.

**Twierdzenie o jednoznaczności zespolonej funkcji wykładniczej**

Jeśli funkcja $f\colon\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ spełnia warunki

**c1** dla dowolnych liczb zespolonych $z, w$ zachodzi równość $f(z+w) = f(z)f(w)$ ,

**c2** dla dowolnego ciągu $(z_n)$ liczb zespolonych różnych od $0$ zbieżnego do $0$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-1}{z_n} = A$ ,

to dla każdej liczby zespolonej $z$ zachodzi równość $f(z) = \exp(Az) = e^{Az}$ .

**Dowód.**

Możemy powtórzyć dowód poprzedniej wersji twierdzenia, jednak postąpimy nieco inaczej. Zdefiniujemy pomocniczą funkcję $g(z) = f(\frac{z}{A})$ , jeśli $A\neq 0$ . Mamy

$$g(z+w) = f(\tfrac{z+w}{A}) = f(\tfrac{z}{A}+\tfrac{w}{A}) = f(\tfrac{z}{A})\cdot f(\tfrac{w}{A}) = g(z)\cdot g(w)\,.$$

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ i $z_n\neq 0$ dla $n\in\mathbb{N}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(z_n)-1}{z_n} = \frac{1}{A}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(z_n/A)-1}{z_n/A} = \frac{1}{A}\cdot A = 1$ . Wobec tego dla każdej liczby zespolonej $z$ zachodzi równość $e^z = g(z)$ . Stąd wynika od razu, że $f(z) = f\left(\frac{Az}{A}\right) = g(Az) = e^{Az}$ . Pozostał przypadek $A = 0$ . Niech $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ . Mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z}{n} = 0$ i $z_n\neq 0$ dla $n\in\mathbb{N}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{z}{n})-1}{\frac{z}{n}} = A = 0$ Z lematu zespolonego o granicach $n$–tych potęg ciągów szybko zbieżnych do 1 wynika, że $f(z) = \left[f\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n = \left[1+\frac{f(\frac{z}{n})-1}{\frac{z}{n}}\frac{z}{n}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, a to oznacza, że dla każdej liczby zespolonej $z$ zachodzi równość $f(z) = 1 = e^{0\cdot z}$ . ∎

Niech $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n$ dla $a, z\in\mathbb{C},\ |z|<1$ . W przykładzie 2 wykazaliśmy, że szereg występujący w definicji funkcji $f$ jest zbieżny bezwzględnie. Obliczymy granicę $\lim\limits_{a\to 0}\frac{f(a)-1}{a}$ .

Jeśli $a\neq 0$ , to $\frac{f(a)-1}{a} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-a\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{a}{n}\right)\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$ . Na tzw. „chłopski rozum" granica $\lim\limits_{a\to 0}\frac{f(a)-1}{a}$ powinna więc być równa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} := L(z)$ .* Wykażemy, że hipotetyczna równość rzeczywiście ma miejsce. Dzięki temu, że $\frac{1}{m+1}\leq\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\leq\frac{1}{m}$ , zachodzą nierówności :

$$\left|\left(1-a\right)\left(1-\tfrac{a}{2}\right)\ldots\left(1-\tfrac{a}{n}\right)\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\right| \leq \left(1+|a|\right)\left(1+\tfrac{|a|}{2}\right)\ldots\left(1+\tfrac{|a|}{n}\right)\frac{|z|^{n+1}}{n+1}\leq$$

$$\leq e^{|a|(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})}\frac{|z|^{n+1}}{n+1}\leq e^{|a|\left(1+\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}\right)}\frac{|z|^{n+1}}{n+1} = e^{|a|(1+\ln n)}\frac{|z|^{n+1}}{n+1} = e^{|a|}n^{|a|}\frac{|z|^{n+1}}{n+1}\,.$$

Jeśli $|a|<\frac{1}{2}$ , to $e^{|a|}n^{|a|} < 2\sqrt{n}$ . Stąd wynika bez trudu, że jeżeli $\varepsilon > 0$ , to istnieje liczba naturalna $k$ taka,

* Autor przypuszcza, że w niektórych wsiach niektórzy chłopi (rolnicy) mogą nie mieć poglądu w tej kwestii, np. z braku zainteresowania nią

że dla każdego $|a| < \frac{1}{2}$ zachodzi nierówność (przypominamy, że $z$ nie zmienia się!):

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(1-a\right)\left(1-\tfrac{a}{2}\right)\ldots\left(1-\tfrac{a}{n}\right)\tfrac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\right| \le \sum_{n=k+1}^{\infty}\tfrac{2\sqrt{n}|z|^{n+1}}{n+1} \le 2\sum_{n=k+1}^{\infty}|z|^{n+1} = \tfrac{|z|^{k+1}}{1-|z|} < \varepsilon\,.$$

Stąd wynika, że

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-a\right)\left(1-\tfrac{a}{2}\right)\ldots\left(1-\tfrac{a}{n}\right)\tfrac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\Big| <$$

$$< 2\varepsilon + \Big|\sum_{n=0}^{k}\left[\left(1-a\right)\left(1-\tfrac{a}{2}\right)\ldots\left(1-\tfrac{a}{n}\right)-1\right]\tfrac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\Big| < 3\varepsilon\,,$$

jeśli tylko liczba $\delta > 0$ jest dostatecznie mała i $|a| < \delta$. Oznacza to, że

$$\lim_{a\to 0}\tfrac{f(a)-1}{a} = \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} =: L(z)\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności zespolonej funkcji wykładniczej wynika, że $f(a) = e^{aL(z)}$ dla każdej liczby zespolonej $a$. Dla $a = 1$ mamy $e^{L(z)} = f(1) = 1+z$, zatem $L(z) = \ln(1+z)$. Jeśli liczba $z$ jest rzeczywista, to mamy do czynienia z logarytmem dobrze znanym, rzeczywistym. Jeśli natomiast liczba $z$ rzeczywista nie jest, to wtedy jest to, jak się okaże niebawem, jedna z nieskończenie wielu możliwych wartości logarytmu zespolonego. Otrzymaliśmy więc wzór

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n = f(a) = e^{aL(z)} = e^{a\ln(1+z)} = (1+z)^a\,.$$

Z tych równości wynika między innymi, że jeśli $|z| < 1$, to $e^{\ln(1+z)} = 1+z$. Dodać należy, że równość $e^{a\ln(1+z)} = (1+z)^a$ jest twierdzeniem w przypadku rzeczywistej liczby $z$, jeżeli liczba $z$ nie jest rzeczywista, to należy tę równość potraktować jako definicję potęgi o podstawie $1+z$. Ogólnie przyjmujemy, że $z^w = e^{w\ln z}$, gdzie $\ln z$ oznacza dowolną liczbę zespoloną, dla której zachodzi wzór $z = e^{\ln z}$. Kwestiami tymi nie będziemy się zbyt dokładnie zajmować, bo na ogół używana jest potęga o podstawie $e$, inne bywają używane, ale nieporównanie rzadziej. Poza tym nie zbadaliśmy jeszcze dostatecznie dokładnie własności funkcji $e^z$, więc nie jesteśmy gotowi do jej stosowania.

Z równości $e^{\ln(1+z)} = 1+z$ wynika, że koło **otwarte** o środku w punkcie 1 i promieniu 1 składa się z wartości funkcji wykładniczej. Wynika również, że jeśli $|z_1|, |z_2| < 1$ i $\ln(1+z_1) = \ln(1+z_2)$, to $1+z_1 = e^{\ln(1+z_1)} = e^{\ln(1+z_2)} = 1+z_2$, zatem $z_1 = z_2$. Oznacza to, ze funkcja $\ln(1+z)$ zmiennej $z$ jest różnowartościowa na kole otwartym $\{z\colon\ |z| < 1\}$. W szczególności $0 = \ln(1+0)$, zatem jeśli $0 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n} = \ln(1+z)$, to $z = 0$.

Powyższe rozumowanie zastępuje przydługie szacowania, którymi uraczyłem Państwa w trakcie wykładu osiągając zresztą wynik słabszy od zaprezentowanego przed chwilą. Przypomnę je dla porządku, choć w ujęciu tu prezentowanym są zbędne. Jeśli $0 < |z| < \frac{2}{3}$, to

$\left|\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}+\cdots\right| \le \frac{|z|^2}{2}+\frac{|z|^3}{3}+\frac{|z|^4}{4}+\frac{|z|^5}{5}+\cdots < \frac{|z|^2}{2}+\frac{|z|^3}{2}+\frac{|z|^4}{2}+\frac{|z|^5}{2}+\cdots =$

$$= \frac{|z|^2}{2(1-|z|)} = |z|\cdot\frac{|z|}{2(1-|z|)} < |z|\cdot\frac{2/3}{2(1-2/3)} = |z|\,.$$

Wynika stąd, że jeśli $0<|z|<\frac{2}{3}$, to $\left|z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots\right| \ge |z|-\left|\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}+\cdots\right| > |z|-|z|=0$.

**Kilka następnych własności funkcji zespolonej exp**

**c3.** $\exp(\overline{z})=\overline{\exp(z)}$ dla każdej liczby zespolonej $z$.

**c4.** Jeśli $y\in\mathbb{R}$, to $\overline{\exp(iy)}=\exp(-iy)$.

**c5.** Jeśli $y\in\mathbb{R}$, to $|\exp(iy)|=1$.

**c6.** $|\exp(z)|=\exp(\mathrm{Re}z)\le\exp(|z|)$ dla każdej liczby zespolonej $z$.

**c7.** Jeśli $y\in\mathbb{R}$, to $|\exp(iy)-1|\le|y|$

**Dowód.** Mamy $\exp(\overline{z})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\overline{z}}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n}=\overline{\exp(z)}$. Wykazaliśmy **c3**. Z tej własności **c4** wynika przez podstawienie, a następna własność wynika stąd, że

$$|\exp(iy)|^2=\exp(iy)\cdot\overline{\exp(iy)}=\exp(iy)\cdot\exp(-iy)=\exp(iy+(-iy))=\exp(0)=1\,.$$

Jeśli $x,y\in\mathbb{R}$ i $z=e^{x+iy}$, to $|z|=\left|e^{x+iy}\right|=\left|e^x\right|\cdot\left|e^{iy}\right|=e^x$; oznacza to, że wartość bezwzględna potęgi o wykładniku zespolonym i podstawie $e$ zależy jedynie od części rzeczywistej wykładnika, część urojona wykładnika ma wpływ jedynie na argument potęgi. Własność **c.6** została udowodniona.

Wykażemy **c7**. Mamy

$$|\exp(ix)-1|=\left|\exp(i\tfrac{x}{n})-1\right|\cdot\left|\exp\left(\tfrac{(n-1)}{n}ix\right)+\exp\left(\tfrac{(n-2)}{n}ix\right)+\cdots+\exp\left(\tfrac{1}{n}ix\right)+1\right|\le$$

$$\le\left|\exp(i\tfrac{x}{n})-1\right|\cdot\left(\exp\left|\tfrac{(n-1)}{n}ix\right|+\exp\left|\tfrac{(n-2)}{n}ix\right|+\cdots+\exp\left|\tfrac{1}{n}ix\right|+1\right)=n\left|\exp(i\tfrac{x}{n})-1\right|=$$

$$=\left|ix\frac{\exp(i\frac{x}{n})-1}{i\frac{x}{n}}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}|x|$$

W ostatnim przejściu granicznym skorzystaliśmy oczywiście z własności **c2**. W ten sposób zakończyliśmy dowód. ■

Niech $z_0=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)-1$ mamy $\left|\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)-1\right|^2=\frac{1}{4}\left[(\sqrt{3}-2)^2+1\right]=2-\sqrt{3}<1$, zatem liczba $1+z_0=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ jest wartością funkcji wykładniczej. Z tego, co przed chwilą wykazaliśmy i z tego, że $\left|\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right|^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$ wynika, że liczba $\ln(1+z_0)$ jest czysto urojona, bo $\left|e^{\ln(1+z_0)}\right|=$ $=\left|\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right|=1$.

**Definicja**

Liczba $\pi$ to liczba rzeczywista taka, że $\frac{\pi}{6}i=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$. ■

Z definicji tej wynika od razu, że $\frac{\pi}{6}i=z_0-\frac{z_0^2}{2}+\frac{z_0^3}{3}-\frac{z_0^4}{4}+\cdots$ Przez chwilę będziemy korzystać z nierówności: $1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74$ oraz $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$. Wynikają one z tego, że $1{,}73^2=2{,}9929<3<$ $<3{,}0276=1{,}74^2$ oraz $1{,}41^2=1{,}9881<2<1{,}0164=1{,}42^2$. Mamy

$$\left|z_0-\frac{z_0^2}{2}\right|^2=\left|\frac{-7+4\sqrt{3}+i(4-\sqrt{3})}{4}\right|^2=\frac{29-16\sqrt{3}}{4}<\frac{29-16\cdot1{,}73}{4}=0{,}33\,,$$

zatem $\left|z_0-\frac{z_0^2}{2}\right|<\sqrt{0{,}33}<0{,}58$.

Mamy też $|z_0|=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Wobec tego

$\left|\frac{z_0^3}{3}-\frac{z_0^4}{4}+\frac{z_0^5}{5}-\frac{z_0^6}{6}+\cdots\right|\le\frac{|z_0|^3}{3}+\frac{|z_0|^4}{4}+\frac{|z_0|^5}{5}+\frac{|z_0|^6}{6}+\cdots<\frac{|z_0|^3}{3}+\frac{|z_0|^4}{3}+\frac{|z_0|^5}{3}+\frac{|z_0|^6}{3}+\cdots=\frac{|z_0|^3}{3(1-|z_0|)}=$

$=\frac{\sqrt2(\sqrt3-1)^3}{2(2+\sqrt2-\sqrt6)} = \frac{\sqrt2(6\sqrt3-10)}{2(2+\sqrt2-\sqrt6)} = \frac{3\sqrt3-5}{\sqrt2+1-\sqrt3} = \frac{(3\sqrt3-5)(\sqrt2+1+\sqrt3)}{2\sqrt2} = \frac{2\sqrt2+3\sqrt3-5-\sqrt6}{6} <$

$< \frac16(2\cdot 1{,}42 + 3\cdot 1{,}74 - 5 - 2{,}4) = 0{,}11\,.$

Stąd $|i\frac{\pi}{6}| = \left|z_0 - \frac{z_0^2}{2} + \frac{z_0^3}{3} - \frac{z_0^4}{4} + \frac{z_0^5}{5} - \frac{z_0^6}{6} + \cdots\right| \le \left|z_0 - \frac{z_0^2}{2}\right| + \left|\frac{z_0^3}{3} - \frac{z_0^4}{4} + \frac{z_0^5}{5} - \frac{z_0^6}{6} + \cdots\right| < 0{,}58 + 0{,}11 = 0{,}69\,.$

Również $|i\frac{\pi}{6}| = \left|z_0 - \frac{z_0^2}{2} + \frac{z_0^3}{3} - \frac{z_0^4}{4} + \frac{z_0^5}{5} - \frac{z_0^6}{6} + \cdots\right| \ge \left|z_0 - \frac{z_0^2}{2}\right| - \left|\frac{z_0^3}{3} - \frac{z_0^4}{4} + \frac{z_0^5}{5} - \frac{z_0^6}{6} + \cdots\right| > 0{,}53 - 0{,}11 = 0{,}42\,.$

Ponieważ $\operatorname{Im}\left(z_0 - \frac{z_0^2}{2}\right) = \frac{4-\sqrt3}{4} > 1 - \frac{1{,}74}{4} > 1 - 0{,}44 = 0{,}56$, więc $\frac{\pi}{6} = \operatorname{Im}\left(z_0 - \frac{z_0^2}{2} + \frac{z_0^3}{3} - \frac{z_0^4}{4} + \frac{z_0^5}{5} - \frac{z_0^6}{6} + \cdots\right) > 0{,}56 - \left|\frac{z_0^3}{3} - \frac{z_0^4}{4} + \frac{z_0^5}{5} - \frac{z_0^6}{6} + \cdots\right| \ge 0{,}56 - 0{,}11 = 0{,}45$. Z otrzymanych nierówności wynika, że $0{,}45 < \frac{\pi}{6} < 0{,}69$, zatem $2{,}7 < \pi < 4{,}14$. Oszacowania te w przyszłości zostaną bardzo istotnie poprawione.

**Definicja funkcji sinus i kosinus**

$\sin z = \frac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right)$, $\cos z = \frac12\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right)$ dla każdej liczby zespolonej $z$. ■

**Wzór Eulera**

$e^{iz} = \exp(iz) = \cos z + i\sin z$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

Wzór ten jest natychmiastową konsekwencją definicji sinusa i kosinusa. ■

Z tego, że $\overline{\exp(iy)} = \exp(-iy)$ (własność **c4**) wynika, że jeśli $y$ jest liczbą rzeczywistą, to $\cos y$ i $\sin y$ też są liczbami rzeczywistymi.

**Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych**

**t1.** $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ dla każdej liczby zespolonej $z$.

**t2.** $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z \sin w$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$.

**t3.** $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$.

**t4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = 1$ dla każdego ciągu $(z_n)$ liczb zespolonych różnych od $0$ zbieżnego do $0$.

Pierwsze trzy własności sprawdzamy korzystając bezpośrednio z definicji. Sprawdzenie ostatniej przeprowadzimy dla przykładu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin z_n}{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\exp(iz_n)-\exp(-iz_n)}{2iz_n} = \frac12\lim_{n\to\infty}\frac{\exp(iz_n)-1}{iz_n} + \frac12\lim_{n\to\infty}\frac{\exp(-iz_n)-1}{-iz_n} = \frac12 + \frac12 = 1\,. \ ■$$

Można wykazać, że własności **t1** – **t4** definiują parę funkcji złożoną z kosinusa i sinusa.

**Kilka następnych własności sinusa i kosinusa**

**t5.** $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ dla każdej liczby zespolonej $z$.

**t6.** $\sin z \pm \sin w = 2\sin\frac{z\pm w}{2}\cos\frac{z\mp w}{2}$, $\cos z + \cos w = 2\cos\frac{z+w}{2}\cos\frac{z-w}{2}$,
$\cos z - \cos w = -2\sin\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2}$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$.

**t7.** $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$, $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$ dla dowolnych liczb *rzeczywistych* $x, y$.

**t8.** Jeśli $0 < y \le \sqrt6$, to $\sin y > 0$. Jeśli $0 \le y \le \sqrt2$, to $\cos y > 0$.

**t9.** Istnieje liczba dodatnia $\frac{\pi}{2}$ taka, że $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ i jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\sin x > 0$ oraz $\cos x > 0$.

**t10.** $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, na przedziale $(0,\pi)$ funkcja sinus jest dodatnia, funkcja kosinus jest na przedziale $[0,\pi]$ malejąca, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$ funkcja sinus jest rosnąca, na przedziale $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ funkcja sinus maleje, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, na przedziale $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ funkcja sinus rośnie, $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$, na przedziale $[\pi, 2\pi]$ funkcja kosinus rośnie,

**t11.** Dla każdej liczby zespolonej $z$ zachodzą równości $\cos(z+2\pi) = \cos z$ oraz $\sin(z+2\pi) = \sin z$.

**t12.** Dla każdej pary liczb rzeczywistych $x, y$ takiej, że $x^2+y^2 = 1$, istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $t \in [0, 2\pi)$, taka że $x = \cos t$ i jednocześnie $y = \sin t$.

**t13.** Dla każdej liczby zespolonej $z$ zachodzą równości

$$\sin z = z - \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} - \tfrac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ oraz } \sin z = 1 - \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^4}{4!} - \tfrac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tfrac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

**Dowód.** Własność **t5** to natychmiastowa konsekwencja definicji sinusa i kosinusa, własność **t6** można wywnioskować z definicji – obliczenia są bardzo proste lub z własności **t2** i **t3** dokładnie tak, jak to czynią autorzy podręczników szkolnych.

Własność **t7** wywnioskujemy z nierówności wykazanej wcześniej: $|\exp(ix) - 1| \leq |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$ (**c7**). Mamy bowiem $|\sin x - \sin y| \leq |\exp(ix) - \exp(iy)| = |\exp(iy)| \cdot |\exp(ix - iy) - 1| = |\exp(i(x-y)) - 1| \leq |x-y|$. Dowód drugiej nierówności jest analogiczny.

Teraz wykażemy własność **t13**. Wynika ona z tego, że $\sin z = \frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big) =$
$= \frac{1}{2i}\Big[\big(1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots\big) - \big(1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots\big)\Big] =$
$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$. Drugi wzór wyprowadzamy w taki sam sposób.

Wykażemy własność **t8**. Na mocy wykazanej już własności **t13** mamy

$$\sin y = y - \tfrac{y^3}{3!} + \tfrac{y^5}{5!} - \tfrac{y^7}{7!} + \cdots \qquad \text{i} \qquad \cos y = 1 - \tfrac{y^2}{2!} + \tfrac{y^4}{4!} - \tfrac{y^6}{6!} + \cdots.$$

Jeśli $0 < y \leq \sqrt{6}$, to $y \geq \frac{y^3}{3!} > \frac{y^5}{5!} > \frac{y^7}{7!} > \cdots$, zatem $\sin y = \big(y - \frac{y^3}{3!}\big) + \big(\frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!}\big) + \cdots > 0$.
Jeśli $0 < y \leq \sqrt{2}$, to $1 \geq \frac{y^2}{2!} > \frac{y^4}{4!} > \frac{y^6}{6!} > \cdots$, zatem $\cos y = \big(1 - \frac{y^2}{2!}\big) + \big(\frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!}\big) + \cdots > 0$.

Ponieważ $\frac{\pi}{4} < \frac{3}{2} \cdot 0{,}69 = 1{,}035 < \sqrt{2} < \sqrt{6}$, więc jeśli $0 < y \leq \frac{\pi}{4}$, to $\cos y > 0$ i $\sin y > 0$. Stąd wynika, że $\sin(2y) = 2\sin y \cos y > 0$. Oczywiście $\sin 0 = 0$.

Jeśli $0 \leq t < s \leq \frac{\pi}{2}$, to $\cos t - \cos s = 2\sin\frac{s-t}{2}\sin\frac{s+t}{2}$. Oczywiście $0 < \frac{s-t}{2} \leq \frac{s}{2} \leq \frac{\pi}{4}$ i $0 < \frac{s+t}{2} < s \leq \frac{\pi}{2}$, więc $\cos t - \cos s = 2\sin\frac{s-t}{2}\sin\frac{s+t}{2} > 0$. Ponieważ
$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2} = e^{i\pi/6 + i\pi/6 + i\pi/6} = e^{i\pi/6} \cdot e^{i\pi/6} \cdot e^{i\pi/6} = \big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\big)^3 = i$, więc $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ i $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Jeśli $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, to $\cos t > \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Wykazaliśmy więc, że na przedziale $\big[0, \frac{\pi}{2}\big)$ kosinus jest dodatni. Ponieważ $\frac{\pi}{2} < \sqrt{6}$, więc na przedziale $\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ sinus jest dodatni. Wynika stąd, że jeśli $0 \leq t < s \leq \pi$, to $\cos t - \cos s = 2\sin\frac{s-t}{2}\sin\frac{s+t}{2} > 0$. Oznacza to, że funkcja kosinus maleje na przedziale $[0, \pi]$. Mamy $cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = -1$ i $\sin\pi = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Wobec tego z nierówności $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ wynika, że $0 = \cos\frac{\pi}{2} > \cos x > \cos\pi = -1$, więc kosinus przyjmuje ujemne wartości na przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Jeśli więc $0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$, to $\sin y - \sin x = 2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2} > 0$, a zatem funkcja sinus jest rosnąca na przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$, podobnie, jeśli $\frac{\pi}{2} \leq x < y \leq \pi$, to $0 < \frac{y-x}{2} < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2} < \frac{x+y}{2} < \pi$, zatem $\sin y - \sin x =$
$= 2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2} < 0$, zatem na przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ funkcja sinus maleje. Zachowanie się obu funkcji kosinus i sinus na przedziale $[\pi, 2\pi]$ można zbadać stosując wzory $\cos(x + \pi) = \cos x\cos\pi - \sin x\sin\pi = -\cos x$ oraz $\sin(x+\pi) = \sin x\cos\pi + \cos x\sin\pi = -\sin x$. To kończy sprawdzenie prawdziwości własności dziesiątej. Własność jedenasta wynika natychmiast z wzorów $\cos(x + \pi) = -\cos x$ oraz $\sin(x + \pi) = -\sin x$, które już uzyskaliśmy.

Udowodnimy teraz dwunastą. Niech $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \in \mathbb{R}$. Niech $z = x + yi$. Jeśli $|z - 1| < 1$, to

$z = e^{\ln[1+(z-1)]}$, istnieje więc wtedy liczba rzeczywista $t$ taka, że $z = e^{it}$. Jeśli $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 1$ i $0 < y \le \frac{1}{2}$, to $(x-1)^2 + y^2 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2) = 2 - \sqrt{3} < 1$, więc istnieje liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że $x = \cos t$ i jednocześnie $y = \sin t$. Jeśli teraz $\frac{1}{2} \le x \le 1$ i $0 \le y \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, to przyjmujemy $x_1 = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ i $y_1 = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$.* Oczywiście $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x_1 \le 1$ i $0 \le y_1 \le \frac{1}{2}$, zatem istnieje liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że $x_1 = \cos t$, $y_1 = \sin t$. Wtedy $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2} = x$ i $\sin(2t) = 2\sin t \cos t = 2\sqrt{\frac{1+x}{2}}\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{y^2} = y$, plus bo $y > 0$.♣ Powtórzymy to rozumowanie zakładając, że $-\frac{1}{2} \le x \le 1$ i $0 \le y$. Definiując $x_1 = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ i $y_1 = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$ stwierdzamy, że $\frac{1}{2} \le x_1 \le 1$ i $y_1 \ge 0$. Na mocy już udowodnionej części tezy stwierdzamy, że istnieje $t \in \mathbb{R}$, takie, że $x_1 = \cos t$ i $y_1 = \sin t$. Wynika stąd, że $x = \cos(2t)$ i $y = \sin(2t)$. Teraz zakładamy, że $-1 \le x \le 1$ i $0 \le y \le 1$. Wtedy $x_1 = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \in [0,1]$ i $y_1 = \sqrt{\frac{1-x}{2}} \in [0,1]$, więc na mocy poprzednio wykazanej części tezy istnieje $t \in \mathbb{R}$ takie, że $x_1 = \cos t$ i $y_1 = \sin t$. Bez trudu stwierdzamy, że $x = \cos(2t)$ i $y = \sin(2t)$. Jeśli $y < 0$, to definiujemy liczbę $\tilde{t}$ tak, że $x = \cos\tilde{t}$, $-y = \sin\tilde{t}$ i zastępujemy ją liczbą $t = \tilde{t} + \pi$. Ponieważ $\cos(t+2\pi) = \cos t$ i jednocześnie $\sin(t+2\pi) = \sin t$, więc zmiana argumentu $t$ o $2\pi$ daje następny argument $\tau$, dla którego spełnione są równości $x = \cos\tau$ i $y = \sin\tau$. Możemy więc znaleźć liczbę $t$ w przedziale $[0, 2\pi)$. Jeśli $y > 0$, to $0 < t < \pi$, jeśli $y < 0$, to $\pi < t < 2\pi$. Jedyność $t$ w tym przedziale wynika z tego, że na przedziale $[0,\pi]$ funkcja kosinus jest ściśle malejąca, a na przedziale $[\pi, 2\pi)$ — ściśle rosnąca. W ten sposób udowodniliśmy własność dwunastą.

Mamy teraz $\exp(\pi i) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, zatem

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Otrzymaliśmy zatem wzór, w którym występują pięć najważniejszych liczb w matematyce.

Przypomnijmy, że $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$, $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ i $\csc t = \frac{1}{\sin t}$, te dwie ostatnie funkcje, tzn. sekans i kosekans, w Polsce są używane rzadko, ale są kraje, w których ich popularność jest większa. Udowodnimy jeszcze dwie nierówności

**t14** $|\sin t| \le t$ dla każdej liczby $t > 0$; $\quad t \le \operatorname{tg} t$ dla $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

**Dowód.**

Pierwsza nierówność wynika z własności **t7**: $|\sin t| = |\sin t - \sin 0| \le |t - 0| = t$ dla $t > 0$. Zajmiemy się drugą. Mamy $\operatorname{tg} t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} \ge 2\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, bo $0 < \frac{t}{2} < \frac{\pi}{4}$, więc $0 < \operatorname{tg}\frac{t}{2} < 1$. Proste rozumowanie indukcyjne przekonuje nas o tym, że $\operatorname{tg} t \ge 2^n \operatorname{tg}\frac{t}{2^n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \operatorname{tg}\frac{t}{2^n} = t \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2^n}}{\frac{t}{2^n}} = t$, więc druga nierówność też jest spełniona.

* Właśnie przystępujemy do „podwajania łuku”, którą to procedurę powtórzymy kilka razy, aż do pochłonięcia „górnego półokręgu jednostkowego”.

♣ Zaczęliśmy od kąta $30°$ i mamy już kąt $60°$, następny w kolejce to $120°$.