Analiza 1, część trzecia

Ten tekst może wymagać jeszcze poprawek, ale już wieszam, 20 listopada 2005

1. Definicja szeregu i szeregu zbieżnego

Zajmiemy się teraz ciągami nieskończonym, ale zapisywanymi w postaci sum. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. *Szeregiem* o wyrazach $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nazywamy ciąg, którego kolejnymi wyrazami są sumy początkowych wyrazów ciągu (a_n) : $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0+a_1$, $s_2 = a_0+a_1+a_2$, ... Liczby s_0 , s_1 , s_2 , ... nazywane są *sumami częściowymi* szeregu o wyrazach a_0 , a_1 ,a_2 , ... Szereg o wyrazach $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oznaczamy symbolem $a_0+a_1+a_2+\ldots$ lub symbolem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, czasem też $\sum a_n$, jeśli nie jest istotne od jakiego wyrazu rozpoczynamy sumowanie. Jeśli ciąg sum częściowych szeregu ma granicę, to nazywamy ją *sumą* szeregu, jeśli suma szeregu jest skończona, to szereg nazywamy *zbieżnym*, jeśli suma szeregu jest nieskończona lub jeśli ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy, to szereg nazywamy *rozbieżnym*. Jeśli szereg ma sumę, skończoną lub nieskończoną, to oznaczamy ją tak samo jak szereg: $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ lub $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Z doświadczenia wynika, że w tym przypadku pewna dwuznaczność oznaczeń nie prowadzi do nieporozumień, a nawet jest ułatwieniem.

Tak jak w przypadku ciągów numerację wyrazów można zaczynać od dowolnej liczby całkowitej. Jeśli rozpoczynamy od liczby k, to stosujemy oznaczenie $a_k + a_{k+1} + \ldots$ lub $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$.

Czytelnik może nieco zaskoczony tym, że rozpoczynamy od definicji i to nieco przydługiej. Otóż pojęcie sumy nieskończonej wymaga definicji: jaka ma być wartość sumy nieskończonej $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n =$ $= 1-1+1-1+1-1+\ldots$? Mogłaby być równa 0, bo $1-1+1-1+1-1+\ldots = (1-1)+(1-1)+\ldots =$ $= 0+0+\ldots$. Mogłaby być równa 1, bo $1-1+1-1+1-1+\ldots = 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1+0+0+\ldots$ A może nie 0 ani 1, lecz $\frac{1}{2}$, bo przecież sumujemy ciąg geometryczny o ilorazie -1, a jak to mówiono w szkole: *suma nieskończonego ciągu geometrycznego* $1+q+q^2+\ldots$ *jest równa* $\frac{1}{1-q}$. Faktem jest, że wielu absolwentów szkół średnich pamięta o tym, że trzeba było założyć, że $|q|<1$, ale duża część nie bardzo wie, dlaczego takie założenie trzeba uczynić.

To nie jest jedyny problem. Rozważmy sumę $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$. Niech $s'_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+$ $+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Ponieważ $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}>0$, więc $s_1{}' > s_3{}' > s_5{}' > \ldots$ oraz $s'_2 < s'_4 < s'_6 < \ldots$, więc ciągi $\left(s'_{2n-1}\right)$ i (s'_{2n}) mają granice. Mamy $s'_{2n-1}-s'_{2n} = \frac{1}{2n}$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(s'_{2n-1}-s'_{2n}\right)=0$. Wobec tego granice ciągów $\left(s'_{2n-1}\right)$ i (s'_{2n}) są równe i leżą między s'_2 oraz s'_1. Oznacza to, że ciąg (s'_n) jest zbieżny i że jego suma leży w przedziale $(\frac{1}{2},1)$. Możemy to zapisać tak: $\frac{1}{2} < \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} < 1$. Teraz rozważmy szereg $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$. Występują w nim te same wyrazy (składniki) co w szeregu

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, ale w innej kolejności: $-\frac{1}{2}$ na trzecim miejscu zamiast na drugim, $\frac{1}{3}$ – na drugim zamiast na trzecim, $-\frac{1}{4}$ – na szóstym zamiast na czwartym, $\frac{1}{5}$ – na czwartym zamiast na piątym, $\frac{1}{7}$ – na piątym zamiast na siódmym, itd. Na tzw. zdrowy rozum suma nie powinna zależeć od kolejności składników. Tak oczywiście jest w przypadku sumowania skończenie wielu liczb. Przekonamy się, że nie dotyczy to szeregów, czyli sum *nieskończenie* wielu składników. Rozważmy kolejne grupy trójskładnikowe: $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}$, ... Pierwsza grupa kończy się składnikiem $-\frac{1}{2}$, druga – składnikiem $-\frac{1}{4}$, trzecia – składnikiem $-\frac{1}{6}$ itd. Widać więc, że ostatni składnik w m-tej grupie jest równy $-\frac{1}{2m}$. Bez trudu można stwierdzić, że poprzedni to $\frac{1}{2\cdot 2m-1}=\frac{1}{4m-1}$, a jeszcze poprzedni, czyli pierwszy w grupie równy jest $\frac{1}{4m-3}$. Mamy $\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{4n(4n-1)}+\frac{3}{4n(4n-3)}$. Wobec tego

$$\frac{1}{4n^2}=\frac{1+3}{4n\cdot 4n}<\frac{1}{4n(4n-1)}+\frac{3}{4n(4n-3)}<\frac{1+3}{4n\cdot n}=\frac{1}{n^2}$$

– korzystaliśmy z tego, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzą podwójne nierówności $4n>4n-1\geq 3n>n$ i $4n>4n-3\geq n$. Oznaczamy sumę n pierwszych wyrazów drugiego szeregu przez s''_n. Mamy oczywiście $0<\frac{1}{4n^2}<s''_{3(n+1)}-s''_{3n}<\frac{1}{n^2}$. Wynika stąd, że ciąg (s''_{3n}) jest ściśle rosnący i dodatkowo

$s''_{3n}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\left(2-\frac{1}{n}\right)<2$.

Wynika stąd, że ciąg $(s_{3n''})$ jest ściśle rosnący i ograniczony, więc ma granicę skończoną. Jest ona większa niż $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ i mniejsza niż 2. Ponieważ $s''_{3n+1}-s''_{3n}=\frac{1}{4n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ i $s''_{3n+2}-s''_{3n+1}=\frac{1}{4n+3}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, więc ciągi $\left(s''_{3n+1}\right)$ i $\left(s''_{3n+2}\right)$ mają granice i to takie same jak ciąg (s''_{3n}). Stąd bezpośrednio wynika, że ciąg (s''_n) jest zbieżny do tej wspólnej granicy swych trzech podciągów, które zawierają wszystkie jego wyrazy. Wykazaliśmy więc, że drugi szereg jest zbieżny. Porównamy teraz sumy obu szeregów. Niech $s'=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, $s''_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$. Zachodzą wzory $s'=\lim\limits_{n\to\infty}s'_{2n}$ i $s''=\lim\limits_{n\to\infty}s''_{3n}$.

Zauważmy, że

$$\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n-2}=$$
$$=\frac{1}{(4n-3)(4n-2)}-\frac{1}{(4n-1)(4n-2)}=\frac{2}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}>0.$$

Wobec tego

$$s''_{3n}-s'_{2n}=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{2}{(4n-3)\cdot(4n-2)\cdot(4n-1)}\geq\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{3}.$$

Stąd od razu wynika, że ciąg $(s''_{3n}-s'_{2n})$ jest ściśle rosnący, zatem $s''-s'>s''_3-s'_3=\frac{1}{3}$.

Okazało się więc, że zmiana kolejności wyrazów szeregu, czyli zmiana kolejności sumowania nieskończonego doprowadziła do zmiany sumy szeregu (suma urosła o więcej niż $\frac{1}{3}$). Można zmienić kolejność wyrazów szeregu tak, by stał się on rozbieżny, np. by ciąg sum częściowych nie miał granicy albo by miał granicę nieskończoną. Wskazuje to wyraźnie na konieczność sprecyzowania pojęcia sumy nieskończonej – od tego zaczęliśmy ten rozdział – a następnie wyjaśnienia, jakie własności przysługują nieskończonym sumom, czyli szeregom, bo przecież wykazaliśmy już, że nie można automatycznie przepisywać summom nieskończonym własności sum skończonych Tym się będziemy zajmować w dalszym ciągu tego rozdziału. Tematu nie wyczerpiemy, wykażemy jedynie kilka twierdzeń, które powinny pomóc zrozumieć, jak można postępować z szeregami w najprostszych sytuacjach.

Twierdzenie (łączność sumowania nieskończonego)

Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny a ciąg (k_n) jest ściśle rosnący, $b_n = a_{k_n} + a_{k_n+1} + \dots + a_{k_{n+1}-1}$, $k_0 = 0$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest podciągiem ciągu sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: $b_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_{k_1-1}$, $b_0 + b_1 = a_0 + a_1 + \dots + a_{k_2-1}$, itd. Jeśli ciąg jest zbieżny, to wszystkie jego podciągi są zbieżne do granicy tego ciągu. ■

Twierdzenie to nie mówi nic o usuwaniu nawiasów. Ogólnie rzecz biorąc nawiasów usuwać nie wolno: szereg $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+\ldots$ jest zbieżny, natomiast po otwarciu nawiasów mamy do czynienia z szeregiem $1-1+1-1+1-1+\ldots$, którego wyraz $(-1)^n$ w ogóle nie ma granicy, w szczególności nie dąży do 0, więc szereg ten jest rozbieżny. Czasem jednak nawiasy można usunąć. Można to zrobić np. w przypadku, gdy wszystkie wyrazy szeregu są tego samego znaku, np. wszystkie są nieujemne. Wtedy bowiem ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest *monotoniczny*, więc ma granicę i jest ona równa granicy każdego podciągu.

Z twierdzenie o granicy iloczynu ciągów wynika od razu, że po pomnożeniu wszystkich wyrazów szeregu zbieżnego przez liczbę rzeczywistą otrzymujemy szereg zbieżny.

Twierdzenie

Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i c jest liczbą rzeczywistą, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)$ też jest zbieżny i zachodzi równość $\sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. ■

Szeregi zbieżne można też dodawać.

Twierdzenie (o dodawaniu szeregów)

Jeśli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to również szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

Twierdzenie to wynika natychmiast z twierdzenia o granicy sumy ciągów i tego, że suma częściowa szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ jest równa sumie sum częściowych szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. ■

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ nazywamy sumą szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Na razie twierdzenia o mnożeniu szeregów nie przedstawimy – odkładamy to na później, bo jest ono trudniejsze od teraz omawianych.

Wypada jeszcze stwierdzić, że natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia o szacowaniu z poprzedniego rozdziału jest następujące

Twierdzenie o porównywaniu sum szeregów

Jeśli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ mają sumy i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n \le b_n$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, przy czym jeżeli sumy są skończone (czyli szeregi są zbieżne) i choćby dla jednej liczby naturalnej n zachodzi nierówność (ostra!) $a_n < b_n$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. ■

2. Warunek konieczny zbieżności szeregu, szereg harmoniczny

Twierdzenie.

Jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód.

Mamy $a_n = s_n - s_{n-1}$. Granica $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ jest skończona, bo szereg jest zbieżny, więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenia tego odwrócić nie można, co pokazuje następny przykład.

Przykład 0 — szereg harmoniczny

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej $k > 1$ prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{k+k} > k \cdot \frac{1}{k+k} = \frac{1}{2}$. Stąd wynika, że

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 2$, $\qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 2\frac{1}{2}$.

Jeśli rozważymy sumę kończącą się na składniku $\frac{1}{32}$, czyli dopiszemy następną grupę ułamków, których sumę można oszacować z dołu przez $\frac{1}{2}$, to stwierdzimy, że suma ta jest większa niż 3. Podobnie kończąc na $\frac{1}{64}$ otrzymujemy sumę większą niż $3\frac{1}{2}$, kończąc na $\frac{1}{128}$ otrzymujemy sumę większą niż 4 itd. Widać więc, że ciąg sum częściowych, który jest rosnący, ma granicę $+\infty$. Wykazaliśmy więc, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, co oznacza, że szereg nie jest zbieżny. ■

Zbadamy teraz zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Podobnie jak w poprzednim przypadku wyraz ma granicę 0: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, wobec czego szereg ma szansę być zbieżny. Wykażemy, że jest zbieżny i że jego suma nie jest większa niż 2.

Mamy $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ dla $n > 1$. Wobec tego możemy napisać:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2\,.$$

Z otrzymanej nierówności wynika, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \le 2$. Wykazaliśmy więc zbieżność szeregu (ciąg sum częściowych jest ograniczony z góry i rosnący). ■

3. Szereg geometryczny

Szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ jest rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$.

Wynika to stąd, że w tym przypadku ciąg (q^n) nie ma skończonej granicy, a jeśli ją ma (gdy $q = 1$), to jest ona różna od 0.

4. Szeregi o wyrazach dodatnich

Podamy teraz kilka twierdzeń umożliwiających w najbardziej podstawowych przypadkach badanie zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych. W tym przypadku ciąg sum częściowych jest niemalejący, więc ma granicę. Jedynym problemem jest to, czy ta granica, czyli suma szeregu jest skończona.

Podaliśmy wcześniej dowód rozbieżności szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Rozumowanie tam przeprowadzone można zastosować w wielu przypadkach. Sformułujemy teraz twierdzenie podane przez Cauchy'ego. Stosowanie tego twierdzenia umożliwia często zastąpienie badanego szeregu innym, w przypadku którego badanie zbieżności jest łatwiejsze: nowy szereg albo jest „szybciej" zbieżny, albo też szybciej rozbieżny.

Kryterium o zagęszczaniu

Załóżmy, że ciąg (a_n) jest nierosnący oraz że jego wyrazy są dodatnie. W tej sytuacji szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że szereg $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny. Trzeba wykazać zbieżność szeregu $a_0 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$. Mamy $2a_4 \leq a_3 + a_4$ (bo $a_4 \leq a_3$), $4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ (bo a_8 jest najmniejszą z liczb $a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$), $8a_{16} \leq a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15} + a_{16}$ itd. Stąd wynika, że $a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \ldots \leq a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots < +\infty$, czyli szereg $a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \ldots$ ma skończoną sumę. Wobec tego po pomnożeniu go przez 2 otrzymamy szereg zbieżny, ale po pomnożeniu przez 2 otrzymujemy szereg $2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \ldots$, a to oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny, a wobec tego również szereg $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny – zmiana *skończenie wielu* wyrazów na zbieżność wpływu nie ma (może mieć jednak wpływ na wartość sumy szeregu zbieżnego).

Udowodnimy teraz wynikanie w druga stronę. Zakładamy, że szereg $a_0 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$ jest zbieżny. Mamy $2a_2 \geq a_2 + a_3$, $4a_4 \geq a_4 + a_5 + a_6 + a_7$, $8a_8 \geq a_8 + a_9 + \cdots + a_{14} + a_{15}$, itd. Stąd wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{14} + a_{15} + \ldots \leq a_0 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots < +\infty$, co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, czyli również szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Dowód został zakończony. ∎

W dowodzie kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu szacowaliśmy sumę jednego szeregu przez sumę drugiego, o którym wiedzieliśmy, że jest zbieżny. Bardzo proste twierdzenia, które podamy za chwilę, pokazują, jak można szacować w wielu sytuacjach szeregi o wyrazach dodatnich.

Kryterium porównawcze

Załóżmy, że dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $0 \le a_n \le b_n$. Wtedy

jeśli szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

jeśli szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Dowód. Załóżmy, że nierówność $0 \le a_n \le b_n$ ma miejsce dla $n \ge k$. Wtedy dla każdego $m \ge k$ zachodzi nierówność $\displaystyle\sum_{n=k}^{m} a_n \le \sum_{n=k}^{m} b_n$. Przechodząc do granicy przy $m \to \infty$ otrzymujemy $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} a_n \le \sum_{n=k}^{\infty} b_n$. Z otrzymanej nierówności obie części tezy wynikają od razu – to, że sumujemy od k zamiast od 0, nie ma znaczenia, bo zmiana skończenie wielu wyrazów szeregów (np. zastąpienie w obu szeregach wyrazów o numerach mniejszych niż k zerami) nie ma wpływu na ich zbieżność, choć na ogół ma wpływ na wartości ich sum. Dowód został zakończony. ∎

To twierdzenie można skomentować tak: szeregowi o mniejszych wyrazach jest łatwiej być zbieżnym niż szeregowi o większych wyrazach.

Asymptotyczne kryterium porównawcze

Załóżmy, że dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $0 < a_n$ i $0 < b_n$ oraz że istnieje skończona, dodatnia granica $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Przy tych założeniach szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$ oraz że $0 < g < +\infty$. Niech c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $0 < c < g < d$. Wtedy dla dostatecznie dużych n zachodzą nierówności $0 < b_n$ i $c < \frac{a_n}{b_n} < d$. Wobec tego dla dostatecznie dużych n mamy $c \cdot b_n < a_n < d \cdot b_n$. Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum c \cdot b_n$ jest zbieżny i wobec tego szereg $\sum b_n$ jest zbieżny. Jeśli natomiast szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum d \cdot b_n$ jest zbieżny i wobec tego szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Dowód został zakończony. ∎

Założenie istnienia granicy skończonej, dodatniej można interpretować tak: wyrazy szeregów dążą do 0 w tym samym tempie (o ile do 0 dążą), z tego założenia wynika, iż albo oba są zbieżne albo oba – rozbieżne. Zanim przejdziemy do przykładów podamy jeszcze jedną wersję twierdzenia pozwalającego porównywać szeregi o wyrazach dodatnich.

Drugie kryterium porównawcze

Załóżmy, że od pewnego miejsca wyrazy szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są dodatnie oraz $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. W tej sytuacji ze zbieżności szeregu $\sum b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum a_n$, zaś z rozbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum b_n$.

Dowód. Nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ można przepisać w postaci $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_n}$. Znaczy to, że ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest nierosnący i ma wyrazy dodatnie, więc jest też ograniczony z góry przez pewną liczbę rzeczywistą $M > 0$ (jeśli „od pewnego miejsca” znaczy „od początku”, to można przyjąć, że $M = \frac{a_0}{b_0}$). Wobec tego ma miejsce nierówność $0 \leq a_n \leq M \cdot b_n$. Z tej nierówności i z kryterium porównawczego teza wynika natychmiast. Dowód został zakończony. ■

Na ostatnią wersję kryterium porównawczego spojrzeć można tak: wyrazy szeregu $\sum a_n$ dążą do 0 szybciej niż wyrazy szeregu $\sum b_n$, więc jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, jeśli natomiast szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny – oczywiście myślimy tylko o szeregach, których wyrazy dążą do 0 , bo inne są rozbieżne.

Podamy teraz kilka przykładów szeregów zbieżnych i rozbieżnych.

Przykład 1.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$.

Dla dowodu zastosujemy kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu. W przypadku $p \leq 0$ wyraz szeregu nie dąży do 0 , więc szereg jest rozbieżny. Natomiast w przypadku $p > 0$ wyrazy szeregu dążą do 0 i tworzą ciąg malejący, więc zamiast szeregu $\sum a_n$ można badać szereg $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum \frac{1}{(2^{p-1})^n}$. Otrzymaliśmy więc szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2^{p-1}}$. Ten iloraz jest zawsze dodatni. Jest mniejszy niż 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$. Dowód został zakończony. ■

Przykład 2.

Szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$.

Dowód przebiegnie tak, jak w przykładzie poprzednim: dla $p > 0$ zastosujemy kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu. Jeśli $p \leq 0$, to dla $n \geq 3$ mamy $\frac{1}{\ln^p n} = \ln^{-p} n \geq 1$, zatem $\frac{1}{n \ln^p n} \geq \frac{1}{n}$. Wobec tego w tym przypadku rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ wynika z rozbieżności znanego nam już szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

W przypadku $p > 0$ stosujemy kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu, więc badamy szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln(2^n))^p} =$

$= \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^p 2}$, co oznacza, że sprowadziliśmy badanie szeregu do szeregu zbadanego w poprzednim przykładzie, więc zbieżnego wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$. Dowód został zakończony. ■

Te dwa przykłady wyjaśnić mają sens uwag wypowiedzianych tuż przed sformułowaniem kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu. Należy myśleć, że szereg geometryczny jest szybciej zbieżny niż szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, a ten z kolei – szybciej niż szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$, bo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{1/n^p} = \lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/n^p}{1/(n \ln^p n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^p = 0$.

Przykład 3.

Wyjaśnimy teraz, czy szereg $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{7+13n^3-121n^4+2n^6}{13-433n+12n^4-1331n^7}$ jest zbieżny, czy też rozbieżny.

W liczniku i w mianowniku ułamka występują wielomiany zmiennej n . W liczniku najwyższa potęga zmiennej to n^6 , w mianowniku – n^7 . Wobec tego dla dostatecznie dużych n wyraz szeregu powinien być w przybliżeniu równy $\frac{2n^6}{1331n^7} = \frac{2}{1331n}$. Porównamy nasz szereg z szeregiem harmonicznym $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Iloraz wyrazów obu szeregów równy jest $\frac{7n+13n^4-121n^5+2n^7}{13-433n+12n^4-1331n^7}$, więc ma granicę $-\frac{2}{1331}$. Ponieważ wyrazy szeregu harmonicznego są dodatnie, więc od pewnego miejsca wyrazy badanego szeregu są ujemne. Wobec można zająć się najpierw szeregiem o wyrazie przeciwnym. Wtedy spełnione będą założenia asymptotycznego kryterium porównawczego. Wobec tego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7+13n^3-121n^4+2n^6}{13-433n+12n^4-1331n^7}$ jest rozbieżny, a to oznacza, że interesujący nas szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7+13n^3-121n^4+2n^6}{13-433n+12n^4-1331n^7}$ też jest rozbieżny. ■

Widzieliśmy w tym przykładzie, jak zazwyczaj stosowane jest kryterium porównawcze. Trzeba po prostu zorientować się, czym można przybliżyć wyraz szeregu i wykorzystać przybliżenie w sposób zgodny z twierdzeniami, które zostały udowodnione wcześniej – czasem wymaga to drobnych przekształceń: w przykładzie trzecim trzeba było przejść do szeregu o wyrazach dodatnich. Może zaistnieć konieczność przeprowadzenia innych modyfikacji. Badanie zbieżności pewnych szeregów jest trudne, bo można nie zawsze od razu widać z jakim szeregiem można porównywać ten, który badamy, ale my takimi szeregami zajmować się nie będziemy.

Przykład 4.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{n}$ jest zbieżny.

Kłopot może sprawiać czynnik $e^{1/n}-1$. Wykazaliśmy jednak wcześniej, że jeśli ciąg (x_n) jest zbieżny do 0, to $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1$. Oznacza to, że dla dostatecznie dużych n zachodzi równość przybliżona $e^{x_n} \approx 1+x_n$. Wobec tego interesujący nas szereg powinien zachowywać się tak, jak szereg o wyrazie $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$. Jest tak w rzeczywistości bowiem $\lim_{n\to\infty} \frac{(e^{1/n}-1)/n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{1/n} = 1$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, ma wyrazy dodatnie, więc można zastosować asymptotyczne kryterium porównawcze. Dowód został zakończony. ■

Przykład 5.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{13}}{7^n}$ jest zbieżny.

Tym razem powinniśmy myśleć o porównaniu z szeregiem geometrycznym, bo czynnik $\frac{1}{7^n}$ powinien zdominować czynnik n^{13}. Tak jest rzeczywiście, ale iloraz $\frac{n^{13}/7^n}{1/7^n}$ ma granicę $+\infty$, co uniemożliwia porównanie z szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$. Trzeba rozważyć szereg nieco wolniej zbieżny od tego szeregu, np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$. Wtedy iloraz wyrazów badanego szeregu i szeregu „próbnego" jest równy $n^{13}\left(\frac{6}{7}\right)^n$, więc ma granicę 0, zatem dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\frac{n^{13}}{7^n} < \frac{1}{6^n}$ i możemy zastosować kryterium porównawcze. Dowód został zakończony. ■

W istocie rzeczy przykład 4 pokazuje, że asymptotyczne kryterium porównawcze można nieco rozszerzyć: jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ i wyrazy obu szeregów $\sum a_n$, $\sum b_n$ są dodatnie, to ze zbieżności szeregu $\sum b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum a_n$ — tym razem jest wynikanie zamiast równoważności. Dodajmy, że jeśli

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, to z rozbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum b_n$ – również w tym przypadku nie ma równoważności.

W taki sam sposób można udowodnić, że jeśli $0 < q < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nq^n$ jest zbieżny. Jednak w tym przypadku nie ograniczymy się do stwierdzenia zbieżności. Obliczymy sumę tego szeregu, bo ten rezultat jest przydatny w rachunku prawdopodobieństwa

Przykład 6.

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Zachodzą następujące równości:

$\sum\limits_{n=0}^{k} (n+1)q^n = \big(1+q+q^2+\cdots+q^k\big) + \big(q+q^2+\cdots+q^k\big) + (q^2+\cdots+q^k) + \cdots + (q^{k-1}+q^k) + q^k =$

$= \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + \frac{q-q^{k+1}}{1-q} + \frac{q^2-q^{k+1}}{1-q} + \cdots + \frac{q^{k-1}-q^{k+1}}{1-q} + \frac{q^k-q^{k+1}}{1-q} = \frac{1+q+q^2+\cdots+q^{k-1}+q^k-(k+1)q^{k+1}}{1-q} = \frac{\frac{1-q^{k+1}}{1-q}-(k+1)q^{k+1}}{1-q} =$

$= \frac{1-q^{k+1}}{(1-q)^2} - \frac{(k+1)q^{k+1}}{1-q}$. Ponieważ $q^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ i $(k+1)q^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, więc na mocy twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu mamy $\sum\limits_{n=0}^{k} (n+1)q^n \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{(1-q)^2}$.

Wypada dodać, że w dowodzie nie korzystaliśmy z tego, że $q > 0$ – wystarczy założyć, że $|q| < 1$. ■

Pokazaliśmy na kilku prostych przykładach, w jaki sposób można stosować poznane kryteria. Kryteria te są bardzo proste. Wyprowadzić z nich można wiele kryteriów, których stosowania ułatwia badanie szeregów w konkretnych sytuacjach, bez wskazywania w jawny sposób szeregu „próbnego". Pokażemy dwa najprostsze, które stosujemy, gdy chcemy porównać szereg z szeregiem geometrycznym, tj. takim w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały. Pierwsze zostało podane przez d'Alemberta (1717-1783) francuskiego matematyka, fizyka i filozofa, autora wstępu do Encyklopedii.

Kryterium ilorazowe d'Alemberta

Jeśli wyrazy szeregu $\sum a_n$ są dodatnie i istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, to w przypadku $q > 1$ szereg jest rozbieżny, zaś w przypadku $q < 1$, szereg jest zbieżny.

Dowód. Jeśli $q > 1$, to od pewnego momentu zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to znaczy $a_{n+1} > a_n$. Wobec tego od pewnego momentu ciąg liczb dodatnich (a_n) jest rosnący, więc jeśli jest zbieżny, to z pewnością nie do 0 – nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. Załóżmy teraz, że $q < 1$. Niech r oznacza dowolną liczbę większą niż q i jednocześnie mniejszą niż 1, np. $r = \frac{1+q}{2}$. Wtedy dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r = \frac{r^{n+1}}{r^n}$. Szereg geometryczny $\sum r^n$ jest zbieżny, więc również szereg $\sum a_n$ jest zbieżny – stosujemy drugie kryterium porównawcze. Dowód został zakończony. ■.

Obliczanie granicy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ma na celu ustalenie z jakim szeregiem geometrycznym mamy porównywać szereg $\sum a_n$: dla ustalenia zbieżności wybieramy szereg o ilorazie r nieco większym niż q, dla ustalenia rozbieżności – o ilorazie r nieco mniejszym niż q (*nieco* oznacza, że liczby r i q znajdują się po tej samej stronie liczby 1). Oczywiście można założyć w sformułowaniu kryterium ilorazowego, że

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n, czyli że $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, z dowodu wynika że to wystarczy. W przypadku drugim wystarczy stwierdzić, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (wynika to np. z nierówności $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$), bo wtedy oczywiście niemożliwe jest, by $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

W przypadku $q = 1$ szereg może być rozbieżny, np. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ lub zbieżny, np. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. W wielu przypadkach granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ nie istnieje.

A.Cauchy podał inne kryterium zbieżności szeregów związane z szeregami geometrycznymi.

Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego

Jeśli szereg $\sum a_n$ ma wyrazy nieujemne i istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, to w przypadku $q > 1$ szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, zaś w przypadku $q < 1$ – zbieżny.

Dowód. Jeśli $q > 1$ to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_n} > 1$ i wobec tego $a_n > 1$. Wobec tego ciąg (a_n) nie jest zbieżny do 0. Jeśli $q < 1$ i r jest liczbą mniejszą niż 1 i jednocześnie większą niż q, np. $r = \frac{1+q}{2}$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_n} < r$, czyli $a_n < r^n$. Stosując kryterium porównawcze stwierdzamy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, bo zbieżny jest szereg geometryczny $\sum r^n$. Dowód został zakończony. ■

Podobnie jak w poprzednim przypadku, jeśli granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ jest równa 1, to na temat zbieżności szeregu $\sum a_n$ powiedzieć nic nie można o czym świadczą przykłady przywołane po poprzednim twierdzeniu. Również w przypadku tego kryterium wystarczy założyć, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, by uzyskać zbieżność oraz że $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, by uzyskać rozbieżność.

Wyjaśnijmy jeszcze, dlaczego obliczać należy tę akurat granicę. Otóż chodzi o porównanie z szeregiem geometrycznym. Metoda d'Alemberta jest najprostsza i najbardziej naturalna. Druga metoda znalezienia q, jeśli dany jest ciąg geometryczny (aq^n) to obliczenie pierwiastka stopnia n z wyrazu aq^n. Otrzymujemy $q\sqrt[n]{a}$, to co prawda nie jest dokładnie q, ale $\lim\limits_{n\to\infty} q\sqrt[n]{a} = q$.

Nadmienić wypada, że kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego jest nieco ogólniejsze niż kryterium ilorazowe d'Alemberta. Prawdziwe jest mianowicie następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeśli (a_n) jest ciągiem liczb dodatnich, takim że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, to również ciąg $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ ma granicę i jest nią q.

Dowód.

Stwierdzeniem równoważnym tezie jest: $\frac{\ln a_n}{n} = \ln \sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln q$. Ma to być wnioskiem z tego, że $\ln a_{n+1} - \ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln q$. Jest to jednak wniosek natychmiastowy z twierdzenia Stolza. Wystarczy przyjąć $b_n = \ln a_n - \ln a_1$ oraz $c_n = n$ i zastosować twierdzenie Stolza do ilorazu $\frac{b_n}{c_n}$, co zrobić wolno, bo ciąg (c_n) jest ściśle rosnący i nieograniczony z góry. Mamy zatem $b_{n+1} - b_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$ oraz $c_{n+1} - c_n = 1$, więc $\frac{b_{n+1}-b_n}{c_{n+1}-c_n} = \ln a_{n+1} - \ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln q$. Dowód został zakończony. ■

Bez trudu można skonstruować ciąg (a_n) liczb dodatnich, dla którego istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i nie istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$: $\quad 1\,,\,1\,,\,\frac12\,,\,2\,,\,\frac13\,,\,3\,,\,\frac14\,,\,4\,,\ldots$ Sprawdzenie szczegółów pozostawiamy czytelnikowi w charakterze prostego ćwiczenia.

Szereg geometryczny nie jest jedynym szeregiem „wzorcowym”. Wzorcem może być też np. szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Twierdzenie pozwalające na obliczanie „właściwego” wykładnika p znajduje się poniżej.

Kryterium Raabego

Jeśli szereg $\sum a_n$ ma wyrazy dodatnie i istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$, to jeśli $p>1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a w przypadku $p<1$ – rozbieżny. ■

Dowód.

Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1/n^q}{1/(n+1)^q}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^q-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac1n\right)^q-1}{\frac1n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{q\ln(1+\frac1n)}-1}{q\ln(1+\frac1n)}\cdot\frac{q\ln(1+\frac1n)}{\frac1n}=1\cdot q\,.$ Niech q będzie liczbą leżącą między 1 i p; jeśli $p<\infty$, można przyjąć $q=\frac{1+p}{2}$. Jeśli $p>1$, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n mamy $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>n\left(\frac{1/n^q}{1/(n+1)^q}-1\right)$, więc $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1/(n+1)^q}{1/n^q}$ i teza wynika natychmiast z drugiego kryterium porównawczego i zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Rozumowanie w przypadku $p<1$ jest w pełni analogiczne. ■

Pojęcie szeregu (czyli sumy nieskończonej) pozwala zapisać twierdzenie o przybliżeniach dziesiętnych nieco prościej niż poprzednio. Zapiszemy je zastępując liczbę 10 dowolną dodatnią liczbą całkowitą.

Twierdzenie o przedstawianiu liczb rzeczywistych w układzie pozycyjnym

Niech $c\geq 2$ będzie liczbą całkowitą i niech $D=\{0,1,2,\ldots,c-1\}$. Niech x będzie liczbą dodatnią. Istnieje wtedy dwustronny ciąg (c_n) i liczba całkowita k taka, że $c_n=0$ dla $n>k$, $c_j\in D$ dla każdego $j\in\mathbb{Z}$, $x=\sum_{j=0}^{+\infty}c_{k-j}c^{k-j}$. Jeśli $(\tilde c_n)$ jest innym ciągiem, któremu przysługują te same własności co ciągowi (c_n), to istnieje liczba całkowita i taka, że jeśli $j>i$, to $c_j=\tilde c_j$, $c_i=\tilde c_i+1$ lub $\tilde c_i=c_i+1$, w pierwszym z tych przypadków mamy $c_j=0$ oraz $\tilde c_j=c-1$ dla $j<i$, w drugim odwrotnie, tzn. $\tilde c_j=0$ oraz $c_j=c-1$ dla $j<i$. Liczbie x odpowiadają dwa ciągi (c_n) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita i taka, że $c^{-i}\cdot x\in\mathbb{N}$. ■

Dowodu nie podajemy pozostawiając przeformułowanie podanego poprzednio bez użycia szeregu tak, aby obejmował przypadek dowolnego c.

Definicja szeregu bezwzględnie zbieżnego i szeregu zbieżnego warunkowo

Szereg $\sum a_n$ nazywany jest bezwzględnie zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum|a_n|$ jest zbieżny, tzn. gdy $\sum|a_n|<+\infty$. Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie, to nazywany jest szeregiem zbieżnym warunkowo. ■

Najprostszymi szeregami bezwzględnie zbieżnymi są oczywiście szeregi o wyrazach dodatnich, ale jest też wiele innych. Szereg $\sum(-1)^{n-1}\frac1n$ jest zbieżny warunkowo. Szereg $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny bezwzględnie.

Twierdzenie o zbieżności szeregu bezwzględnie zbieżnego.

Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Dowód.

Trzeba wykazać, że szereg $\sum a_n$ spełnia warunek Cauchy,ego wiedząc, że szereg $\sum |a_n|$ spełnia ten warunek. To jednak wynika od razu z nierówności trójkąta:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon \,. \blacksquare$$

Jedną z podstawowych własności szeregów bezwzględnie zbieżnych jest niezależność ich sumy od kolejności wyrazów szeregu. Udowodnimy teraz to twierdzenie.

Twierdzenie o sumowaniu szeregu bezwzględnie zbieżnego w dowolnej kolejności

Niech p będzie dowolną permutacją zbioru wszystkich liczb naturalnych, tzn. w ciągu $\big(\mathrm{p}(n)\big)$, czyli w ciągu $\mathrm{p}(0)$, $\mathrm{p}(1)$, $\mathrm{p}(n)$,... występują wszystkie liczby naturalne, każda dokładnie jeden raz. Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem bezwzględnie zbieżnym. Wtedy szereg $\sum a_{\mathrm{p}(n)}$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\mathrm{p}(n)} \,.$$

Dowód. Niech $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $s_n^{\mathrm{p}} = a_{\mathrm{p}(0)} + a_{\mathrm{p}(1)} + \cdots + a_{\mathrm{p}(n)}$ i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje liczba naturalna m, taka że $|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}$. Istnieje liczba naturalna $n_\varepsilon \geq m$, taka że wśród liczb $\mathrm{p}(0)$, $\mathrm{p}(1)$, $\ldots, \mathrm{p}(n_\varepsilon)$ znajdują się wszystkie liczby $0, 1, 2, \ldots, m$. Niech $k > n_\varepsilon$. Wtedy $|s_k - s_k^{\mathrm{p}}| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots$, bowiem zarówno s_k jak i s_k^{p} są sumami pewnych liczb a_j, jeśli jakiś wyraz jest składnikiem obu sum, to nie występuje w różnicy $s_k - s_k^{\mathrm{p}}$. Wyrazy a_0, a_1, $\ldots$, a_m występują zarówno w s_k jak i w s_k^{p}, więc nie występują one w $s_k - s_k^{\mathrm{p}}$, wobec tego $|s_k - s_k^{\mathrm{p}}| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}$. Takie same rozważania dotyczą różnicy $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k$, więc również $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wobec tego

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k^{\mathrm{p}}\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k\right| + \left|s_k - s_k^{\mathrm{p}}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dla każdej liczby $k > n_\varepsilon$. Z definicji granicy ciągu wynika więc, że $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n^{\mathrm{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, a to właśnie oznacza, że $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{\mathrm{p}(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dowód został zakończony. $\blacksquare$

Zajmiemy się teraz twierdzeniem o mnożeniu szeregów. Mnożąc dwie *skończone* sumy liczb

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$$

otrzymujemy sumę wszystkich iloczynów postaci $a_i b_j$, np. dla $n = 2$ mamy:

$$(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) = a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + a_1b_0 + a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2 \,.$$

Oczywiście otrzymaną sumę dziewięciu składników można porządkować na wiele sposobów (9!=362880). W przypadku skończonej liczby składników kolejność dodawania nie ma żadnego wpływu na ich sumę. To samo dotyczy nieskończenie wielu składników pod warunkiem rozważania wyrazów szeregu bezwzględnie zbieżnego. W przypadku szeregu, który nie jest bezwzględnie zbieżny należy jednak być ostrożnym. Jest jasne, że mnożąc dwa szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ powinniśmy otrzymać szereg, wśród wyrazów którego są wszystkie iloczyny postaci a_ib_j uporządkowane w jakiś sensowny sposób. Okazuje się, że sugerowany rezultat wygodnie jest sformułować tak:

Twierdzenie Mertensa o mnożeniu szeregów

Załóżmy, że szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne, przy czym co najmniej jeden z nich jest zbieżny bezwzględnie. Niech $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = \sum_{i+j=n} a_ib_j$. Wtedy szereg $\sum c_n$ jest zbieżny i zachodzi równość:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

jeśli oba szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne bezwzględnie, to również szereg $\sum c_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

Dowód.

Przyjmijmy, że: $s_n^a = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $s_n^b = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, $s_n^c = c_0 + c_1 + \cdots + c_n = \sum_{i+j\leq n} a_ib_j$. Wiemy, że istnieją skończone granice $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^a = A$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^b = B$. Mamy wykazać, że granicą ciągu (s_n^c) jest AB. Oczywiście jest wszystko jedno, o którym szeregu założymy, że jest bezwzględnie zbieżny. Przyjmijmy, że jest to szereg $\sum a_n$, czyli $\sum |a_n| < +\infty$. Zauważmy, że:

$$s_n^c = \sum_{i+j\leq n} a_ib_j = a_0(b_0+b_1+\cdots+b_n) + a_1(b_0+b_1+\cdots+b_{n-1}) + a_2(b_0+b_1+\cdots+b_{n-2}) + \cdots + a_nb_n =$$
$$= a_0s_n^b + a_1s_{n-1}^b + a_2s_{n-2}^b + \cdots + a_ns_0^b .$$

Wobec tego

$$s_n^as_n^b - s_n^c = a_0s_n^b + a_1s_n^b + a_2s_n^b + \cdots + a_ns_n^b - s_n^c = a_1\left(s_n^b - s_{n-1}^b\right) + a_2\left(s_n^b - s_{n-2}^b\right) + + \cdots + a_n\left(s_n^b - s_0^b\right).$$

Ponieważ szeregi $\sum |a_n|$ oraz $\sum b_n$ są zbieżne, więc ich ciągi sum częściowych są ograniczone. Oznacza to, że istnieje liczba $M > 0$, taka że dla każdego m prawdziwe są nierówności:

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m| \leq M, \qquad |b_0 + b_1 + \cdots + b_m| \leq M .$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ze zbieżności szeregu wynika, że spełnia on warunek Cauchy'ego, więc istnieje liczba naturalna n_ε, taka że jeśli $k > m > n_\varepsilon$, to $|s_k^b - s_m^b| < \frac{\varepsilon}{4M}$ oraz $\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n| = |a_{n_\varepsilon+1}| + |a_{n_\varepsilon+2}| + \ldots < \frac{\varepsilon}{8M}$, $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n - s_m^a \cdot s_m^b\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wobec tego dla $m > 2n_\varepsilon$ mamy

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n - s_m^c\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n - s_m^a \cdot s_m^b\right| + \left|s_m^as_m^b - s_m^c\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + |a_1| \cdot |s_m^b - s_{m-1}^b| + |a_2| \cdot |s_m^b - s_{m-2}^b| + \cdots + |a_{n_\varepsilon}| \cdot |s_m^b - s_{n-n_\varepsilon}^b| +$$
$$+ |a_{n_\varepsilon+1}| \cdot |s_m - s_{m-n_\varepsilon-1}| + |a_{n_\varepsilon+2}| \cdot |s_m - s_{m-n_\varepsilon-2}| + \cdots + |a_m| \cdot |s_m - s_0| \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_\varepsilon}|) \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + (|a_{n_\varepsilon+1}| + |a_{n_\varepsilon+2}| + \cdots + a_m) \cdot 2M \leq \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{8M} \cdot 2M = \varepsilon .$$

Z definicji granicy ciągu wynika, że $\lim_{m\to\infty} s_n^c = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Pozostaje jeszcze zauważyć, że jeśli oba szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są bezwzględnie zbieżne, to również szereg $\sum c_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Wynika to natychmiast z już udowodnionej części twierdzenia i warunku Cauchy'ego. Dowód został zakończony. ■

Czytelnik może się przekonać, że istnieją szeregi zbieżne $\sum a_n$ i $\sum b_n$, dla których szereg $\sum c_n$ jest rozbieżny. Wystarczy przyjąć $a_n = b_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ i przekonać się, że w tym przypadku ciąg (c_n) nie jest zbieżny do 0, więc szereg $\sum c_n$ jest rozbieżny. Z drugiej strony jeśli szeregi $\sum a_n$, $\sum b_n$ i $\sum c_n$ są zbieżne, to $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ – nie podamy dowodu tego twierdzenia, bo nie będziemy z niego korzystać. Opisane twierdzenia wskazują na to, że zaproponowana przez Cauchy'ego kolejność sumowania iloczynów $a_i b_j$, jest właściwa.

Definicja iloczynu szeregów

Jeśli dla każdej liczby naturalnej m zachodzi równość $c_m = \sum_{i+j=m} a_i b_j = \sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nazywany jest iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. ■

Przed podaniem następnych przykładów i twierdzeń zajmiemy się przez chwilę ciągami i szeregami liczb zespolonych.

Definicja granicy ciągu

Liczba zespolona z jest granicą ciągu liczb zespolonych (z_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n_ε taka, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|z_n - z| < \varepsilon$. ■

Jak widać definicja granicy jest dokładnie taka sama jak w przypadku liczb rzeczywistych. Jasne jest, że $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$. Nie możemy jednak mówić o ciągach monotonicznych, bo w zbiorze liczb zespolonych nie da się zdefiniować nierówności zgodnej z dodawaniem i mnożeniem. Twierdzenia, definicje itp., które nie są związane z monotonicznością, można przenieść na ogół bez żadnych zmian na przypadek zespolony.

Będziemy standardowo przyjmować, że $z = x + yi$, $z_n = x_n + y_n i$ zakładając, że $x, y, x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

Stwierdzenie

Ciąg (z_n) jest zbieżny do liczby z wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ i $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Dowód.

Mamy $|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \geq |x_n - x|$ i $|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \geq |y_n - y|$.* Wobec tego z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, co kończy dowód stwierdzenia w jedną stronę. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, to $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z|$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. ■

Z nierówności $|x_n - x| \leq |z_n - z|$, $|y_n - y| \leq |z_n - z|$ i $|z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$ wynika

Stwierdzenie

Ciąg (z_n) spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy oba ciągi (x_n), (y_n) spełniają warunek Cauchy'ego. ■

Wobec tego prawdziwe jest

Stwierdzenie

Ciąg (z_n) ma granicę (skończoną) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek Cauchy'ego. ■

Z tego banalnie wyglądającego stwierdzenia wynika, że twierdzenia o szeregach bezwzględnie zbieżnych są prawdziwe również w przypadku szeregów o wyrazach zespolonych.

---

* Odległość między rzutami na oś nie przekracza odległości między rzutowanymi punktami.

Przykład 7.

Niech z oznacza dowolną liczbę zespoloną. Udowodnimy teraz bezpośrednio, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ jest bezwzględnie zbieżny. Zastosujemy kryterium ilorazowe d'Alemberta do szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n!}\right|$ w przypadku $z\neq 0$, w przypadku $z=0$ nasz szereg ma wyrazy nieujemne: $1+0+0+0+\ldots$, więc jest zbieżny bezwzględnie. Zachodzi wzór $\left(\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|\right)\Big/\left(\left|\frac{z^n}{n!}\right|\right)=\frac{|z|}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0<1$, zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n!}\right|$ jest zbieżny dla każdego $z\neq 0$, co oznacza, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ jest zbieżny bezwzględnie. Wykażemy, że dla dowolnych liczb zespolonych z,w zachodzi równość $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}$. Zasotujemy oczywiście twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów. Mamy

$$\Big(1+\tfrac{z}{1!}+\tfrac{z^2}{2!}+\tfrac{z^3}{3!}+\ldots\Big)\cdot\Big(1+\tfrac{w}{1!}+\tfrac{w^2}{2!}+\tfrac{w^3}{3!}+\ldots\Big)=$$
$$=1+\left(\tfrac{z}{1!}+\tfrac{w}{1!}\right)+\left(\tfrac{z^2}{2!}+\tfrac{z}{1!}\cdot\tfrac{w}{1!}+\tfrac{w^2}{2!}\right)+\left(\tfrac{z^3}{3!}+\tfrac{z^2}{2!}\cdot\tfrac{w}{1!}+\tfrac{z}{1!}\cdot\tfrac{w^2}{2!}+\tfrac{w^3}{3!}\right)+\cdots\overset{\text{dwumian Newtona}}{=\!=\!=\!=\!=}$$
$$=1+\tfrac{z+w}{1!}+\tfrac{(z+w)^2}{2!}+\tfrac{(z+w)^3}{3!}+\ldots.\ \blacksquare$$

Wypada stwierdzić, że w licznych podręcznikach liczba e^x jest definiowana jako suma szeregu nieskończonego $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Postąpiliśmy inaczej głównie ze względu na to, że ta definicja, którą podaliśmy wcześniej, $e^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, może być na tym poziomie zaawansowania łatwiej powiązana z zastosowaniami i to w zrozumiały sposób. Nadmienić wypada, że po ostatnim przykładzie niewiele już zostało do zrobienia, by otrzymać wszystkie własności funkcji wykładniczej na drodze tu opisanej. Dobrym i jednocześnie prostym ćwiczeniem byłoby wykazanie nierówności $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\geq 1+x$ dla ujemnych liczb rzeczywistych x za pomocą operacji na szeregach.

Teraz zajmiemy się funkcją wykładnicza o podstawie e i zespolonym wykładniku.

Lemat zespolony o granicach n-tych potęg ciągów „szybko zbieżnych" do 1

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot z_n=0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(1+z_n)^n=1$.

Dowód.

Wykażemy, że zachodzi nierówność $|(1+z)^n-1|\leq(1+|z|)^n-1$ korzystając z dwumianu Newtona i nierówności trójkąta. Zachodzą wzory:

$$|(1+z)^n-1|=\left|1+\tbinom{n}{1}z+\tbinom{n}{2}z^2+\cdots+\tbinom{n}{n-1}z^{n-1}+z^n-1\right|\leq$$
$$\leq\tbinom{n}{1}|z|+\tbinom{n}{2}|z|^2+\cdots+\tbinom{n}{n-1}|z|^{n-1}+|z|^n=(1+|z|)^n-1.$$

Ponieważ założyliśmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot z_n=0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot|z_n|=0$ i wobec tego, że zachodzi nierówność $|(1+z_n)^n-1|\leq(1+|z_n|)^n-1$, a to ostatnie wyrażenie ma granicę 0 przy $n\longrightarrow\infty$, na mocy rzeczywistego lematu o potęgach ciągów szybko zbieżnych do 1, więc lemat zespolony wynika natychmiast z twierdzenia o trzech ciągach. $\blacksquare$

Teraz czeka nas dowód istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$. Musi on się różnić od dowodu w przypadku rzeczywistym, bo o żadnej monotoniczności tym razem mówić nie możemy, bo to pojęcie nie stosuje się do liczb nierzeczywistych. Zamiast niego wykorzystamy twierdzenie Cauchy'ego, wg. którego ciąg liczbowy spełniający warunek Cauchy'ego ma granicę skończoną.

Lemat o zbieżności ciągu $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$

Ciąg $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny.

Dowód.

Zauważmy najpierw, że jeśli $n > m \geq k \geq 0$, to $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} < \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$.Wynika to natychmiast z tego, że $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k k!} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\cdot\frac{1}{k!}$, wobec tego zastępując w tym wzorze m przez $n > m$ zwiększamy mianowniki zachowując liczniki bez zmian, co oczywiście powoduje wzrost mnożonych ułamków. Mamy zatem

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| =$$
$$= \left|1+\binom{n}{1}\frac{z}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2+\dots+\binom{n}{n-1}\left(\frac{z}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{z}{n}\right)^n - \right.$$
$$\left. - \left(1+\binom{m}{1}\frac{z}{m}+\binom{m}{2}\left(\frac{z}{m}\right)^2+\dots+\binom{m}{m-1}\left(\frac{z}{m}\right)^{m-1}+\left(\frac{z}{m}\right)^m\right)\right| \leq$$
$$\leq [1-1]+\left[\binom{n}{1}\frac{1}{n}-\binom{m}{1}\frac{1}{m}\right]|z|+\left[\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}-\binom{m}{2}\frac{1}{m^2}\right]|z|^2+\dots+\left[\binom{n}{m}\frac{1}{n^m}-\binom{m}{m}\frac{1}{m^m}\right]|z|^m +$$
$$+\binom{n}{m+1}\frac{1}{n^{m+1}}|z|^{m+1}+\dots+\binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}}|z|^{n-1}+|z|^n = \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m.$$

Ponieważ ciąg $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$ jest zbieżny (liczba $|z|$ jest rzeczywista!), więc spełnia on warunek Cauchy'ego, wobec tego również ciąg $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego – wykazaliśmy bowiem, że odległości między wyrazami tego ostatniego nie przekraczają odległości odpowiednich wyrazów ciągu $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$. Lemat został dowiedziony. ■

Definicja funkcji wykładniczej o wykładniku zespolonym i podstawie e

$$e^z := \exp(z) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n . \blacksquare$$

Podstawowe własności funkcji zespolonej exp

c1. Dla dowolnych liczb zespolonych z, w zachodzi równość $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$.

c2. Dla dowolnego ciągu (z_n) liczb zespolonych różnych od 0 zbieżnego do 0 zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\exp(z_n)-1}{z_n} = 1$.

Dowód.

Własność **c1** wynika z lematu zespolonego o granicach n–tych potęg ciągów szybko zbieżnych do 1 w dokładnie taki sam sposób jak w przypadku rzeczywistym. Dla dowodu własności **c2** skorzystamy z własności rzeczywistej funkcji exp i wykazanej w dowodzie lematu o zbieżności ciągu $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ nierówności w przypadku $n > m = 1$ zakładając, że $|z| < 1$:

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - (1+z)\right| \leq \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n - (1+|z|) \leq \exp(|z|) - (1+|z|) \leq \frac{1}{1-|z|} - (1+|z|) = \frac{|z|^2}{1-|z|}$$

Mamy więc $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - (1+z)\right| \leq \dfrac{|z|^2}{1-|z|}$. Stąd przechodząc do granicy przy $n \longrightarrow +\infty$ otrzymujemy w przypadku $0 < |z| < 1$ nierówność $|\exp(z)-(1+z)| \leq \dfrac{|z|^2}{1-|z|}$, z której własność **c2** wynika od razu:

$$\left|\frac{\exp(z)-1}{z} - 1\right| = \left|\frac{\exp(z)-(1+z)}{z}\right| \leq \frac{|z|}{1-|z|}. \blacksquare$$

Twierdzenie o jednoznaczności funkcji zespolonej exp

Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ spełnia warunki

c1 dla dowolnych liczb zespolonych z, w zachodzi równość $f(z+w) = f(z)f(w)$,

c2 dla dowolnego ciągu (z_n) liczb zespolonych różnych od 0 zbieżnego do 0 zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(z_n)-1}{z_n} = 1$,

to dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość $f(z) = \exp(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Dowód.

Niech $w_n = \frac{f\left(\frac{z}{n}\right)-1}{\frac{z}{n}}$. Z założenia wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$. Zachodzi również wzór $f\left(\frac{z}{n}\right) = 1 + w_n\frac{z}{n}$ i wobec własności **c1** mamy $f(z) = \left(f(\frac{z}{n})\right)^n = \left(1+w_n\frac{z}{n}\right)^n$. Mamy wobec tego

$$\left(\frac{1+w_n\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{(w_n-1)\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

bo $n\frac{(w_n-1)\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Stąd wynika, że

$$f(z) = \left(1+w_n\frac{z}{n}\right)^n = \left(\frac{1+w_n\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n \cdot \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\cdot\exp(z) = \exp(z), \quad \text{czyli } f(z) = \exp(z). \ \blacksquare$$

Lemat

Niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ dla $z \in \mathbb{C}$. Jeśli $|z| < \frac{1}{2}$ dla pewnej liczby zespolonej z, to $\left|f(z) - (1+z)\right| \le |z|^2$.

Dowód.

Mamy $\left|f(z)-(1+z)\right| = \left|\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right| \le \frac{|z|^2}{2!}+\frac{|z|^3}{3!}+\frac{|z|^4}{4!}+\cdots \le \frac{|z|^2}{2!}+\frac{|z|^3}{2!}+\frac{|z|^4}{2!}+\cdots = \frac{|z|^2}{2(1-|z|)} \le |z|^2$. Z założenia $|z| < \frac{1}{2}$ skorzystaliśmy dwa razy: sumując ciąg geometryczny o ilorazie $|z| < \frac{1}{2}$ i w ostatnim oszacowaniu, w którym skorzystaliśmy z tego, że $1-|z| > \frac{1}{2}$. $\blacksquare$

Twierdzenie o przedstawieniu funkcji wykładniczej w postaci szeregu

Dla każdej liczby zespolonej z zachodzą równości $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Dowód.

Niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. W przykładzie 7. wykazaliśmy, że $f(z+w) = f(z)f(w)$ dla dowolnych liczb zespolonych z, w. Niech (z_n) będzie ciągiem liczb zespolonych różnych od 0 zbieżnym do 0. Dla dostatecznie dużych n mamy więc $0 < |z_n| < \frac{1}{2}$. Wobec tego na mocy lematu zachodzi nierówność

$$\left|\frac{f(z_n)-1}{z_n} - 1\right| = \left|\frac{f(z_n)-(1+z_n)}{z_n}\right| \le \left|\frac{z_n^2}{z_n}\right| = |z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

czyli $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-1}{z_n} = 1$. Wobec tego funkcja f spełnia oba założenia twierdzenia o jednoznaczności funkcji wykładniczej, zatem jest nią, czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

a to właśnie zamierzaliśmy wykazać. $\blacksquare$

Wniosek

Zachodzi równość $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. $\blacksquare$