Analiza 1, część pierwsza

Będziemy rozważać zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, który opiszemy podając pewne jego własności, których prawdziwości dyskutować nie będziemy (pewniki). Pojęciami pierwotnymi, których nie definiujemy są sam zbiór $\mathbb{R}$, dwa jego różne elementy 0 i 1, działania $+$ i $\cdot$ oraz nierówność $<$. Działania to funkcje, które przypisują parze liczb rzeczywistych x, y ich sumę $x+y \in \mathbb{R}$ i iloczyn $x \cdot y \in \mathbb{R}$ oznaczamy zwykle przez xy. Podamy teraz listę pewników (aksjomatów).

D1 Dla dowolnych $a,b,c \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a+b)+c = a+(b+c)$ — dodawanie jest łączne.

D2 Dla dowolnych $a,b \in \mathbb{R}$ zachodzi $a+b = b+a$ — dodawanie jest przemienne.

D3 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $x \in \mathbb{R}$ taka, że $a+x=0$ — istnienie liczby przeciwnej.

D4 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ $a+0=a$ — charakteryzacja zera.

M1 Dla dowolnych $a,b,c \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ — mnożenie jest łączne.

M2 Dla dowolnych $a,b \in \mathbb{R}$ zachodzi $a \cdot b = b \cdot a$ — mnożenie jest przemienne.

M3 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ istnieje liczba $x \in \mathbb{R}$ taka, że $a \cdot x = 1$ — istnienie liczby odwrotnej.

M4 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 1 = a$ — charakteryzacja jedynki.

MD Dla dowolnych $a,b,c \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ — mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

N1 Dla dowolnych $a,b \in \mathbb{R}$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości $a<b$, $a=b$, $b<a$ — prawo trichotomii.

N2 Dla dowolnych $a,b,c \in \mathbb{R}$ z tego, że $a<b$ i $b<c$ wynika, że $a<c$ — nierówność jest przechodnia.

N3 Dla dowolnych $a,b,c \in \mathbb{R}$ z tego, że $a<b$ wynika, że $a+c<b+c$ — do nierówności można dodać stronami liczbę, to prawo wiąże nierówność z dodawaniem.

N4 Dla dowolnych $a,b,c \in \mathbb{R}$ z tego, że $a<b$ i $0<c$ wynika, że $a \cdot c < b \cdot c$ — nierówności można pomnożyć stronami przez liczbę dodatnią, to prawo wiąże nierówność z mnożeniem.

AC Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem niepustym i ograniczonym z góry, tzn. że istnieje liczba $M \in \mathbb{R}$ taka, że jeśli $a \in A$, to $a \le M$, to zbiór A ma kres górny w $\mathbb{R}$, tzn. wśród ograniczeń górnych M zbioru A istnieje liczba najmniejsza.

Oznaczenia

Kres górny zbioru $A \subseteq R$ oznaczamy symbolem $\sup A$, jeśli niepusty zbiór A nie jest ograniczony z góry, to piszemy $\sup A = +\infty$ lub $\sup A = \infty$.
Kres dolny zbioru $A \subseteq R$ oznaczamy symbolem $\inf A$, jeśli niepusty zbiór A nie jest ograniczony z dołu, to piszemy $\inf A = -\infty$. ■

Sformułowanie definicji kresu dolnego pozostawiam studentom w charakterze łatwego ćwiczenia.

Przez $-A$ oznaczać będę zbiór $\{x\colon\ -x \in A\}$, tj. zbiór symetryczny do A względem punktu $0 \in \mathbb{R}$. Jest jasne, że $\sup(-A) = -\inf A$ dla każdego zbioru A, który jest niepusty i ograniczony z dołu (wtedy $-A$ jest ograniczony z góry).

Stwierdzenie 1.

Jeśli dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a + b = a$, to $b = 0$.

Dowód.

Z **D3** wynika, że istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $a + x = 0$. Mamy więc $0 = a + x = (a + b) + x = (b + a) + x = $ $= b + (a + x) = b + 0 = b$ — korzystaliśmy kolejno z określenia x, z przemienności dodawania, łączności dodawania, określenia x, własności liczby 0. ■

Z tego stwierdzenia wynika przede wszystkim, że istnieje dokładnie jeden element neutralny dodawania, mianowicie 0.

Stwierdzenie 2.

Jeśli dla pewnych $y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a + y = a + z$, to $y = z$.

Dowód.

Niech $a + x = 0$. Wtedy $y = y + 0 = y + (a + x) = (y + a) + x = (a + y) + x = (a + z) + x = (z + a) + x = $ $= z + (a + x) = z + 0 = z$. ■

Definicja

$-a$ oznacza jedyną liczbę taką, że $a + (-a) = 0$. ■

To, że liczba, o której jest mowa jest tylko jedna wynika od razu ze stwierdzenia 2.

Stwierdzenie 3.

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna liczba x taka, że $a + x = b$.

Dowód.

Niech $x = (-a) + b$. Mamy $a + x = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b + 0 = b$. Wykazaliśmy istnienie. Jednoznaczność wynika natychmiast ze stwierdzenia 2. ■

Definicja

$a - b := a + (-b)$. ■

Stwierdzenie 4.

Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $-(-a) = a$,

dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $-(a + b) = -a - b$.

Dowód.

$(-a) + [-(-a)] = 0 = a + (-a) = (-a) + a$, zatem na mocy stwierdzenia 2 zastosowanego do $-a$ zachodzi $-(-a) = a$.

Mamy $(a+b)+[-(a+b)] = 0 = a+(-a) = [a+(-a)]+0 = [a+(-a)]+[b+(-b)] = \{[a+(-a)]+b\}+(-b) = $ $= \{a + [(-a) + b]\} + (-b) = \{a + [b + (-a)]\} + (-b) = \{[a + b] + (-a)\} + (-b) = [a + b] + [(-a) + (-b)] = $ $= [a + b] + [-a - b]$, zatem ze stwierdzenia 2 wynika, że $-(a + b) = -a - b$. ■

Następne stwierdzenia zostaną podane bez dowodu, bo ich dowody polegają na zastąpieniu dodawania mnożenie, co każdy czytelnik powinien móc zrobić bez kłopotu, a w razie wystąpienie jakichś nieprzewidzianych trudności zadać pytania na zajęciach lub konsultacjach.

Stwierdzenie 5.

Jeśli dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, przy czym $a \neq 0$, zachodzi równość $a \cdot b = a$, to $b = 1$. $\blacksquare$

Z tego stwierdzenia wynika przede wszystkim, że istnieje dokładnie jeden element neutralny mnożenia, mianowicie 1.

Stwierdzenie 6.

Jeśli dla pewnych $y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a \cdot y = a \cdot z$, przy czym $a \neq 0$, to $y = z$. $\blacksquare$

Definicja

Jeśli $a \neq 0$, to a^{-1} oznacza jedyną liczbę taką, że $a \cdot a^{-1} = 1$. $\blacksquare$

To, że liczba, o której jest mowa jest tylko jedna wynika od razu ze stwierdzenia 6.

Stwierdzenie 7.

Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a \cdot 0 = 0$.

Dowód.

Mamy $a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a = a + 0$. Stąd i ze stwierdzenia 2 wynika, że $a \cdot 0 = 0$. $\blacksquare$

Stwierdzenie 8.

Jeśli $a \neq 0$, to $a^{-1} \neq 0$.

Dowód.

Jeśli $a^{-1} = 0$, to $0 = a \cdot 0 = a \cdot a^{-1} = 1$, wbrew temu, że $0 \neq 1$, zatem $a^{-1} \neq 0$. $\blacksquare$

Stwierdzenie 9.

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, istnieje dokładnie jedna liczba x taka, że $a \cdot x = b$. $\blacksquare$

Definicja

$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$. $\blacksquare$

Stwierdzenie 10.

Dla każdego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi $(a^{-1})^{-1} = a$,
dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. $\blacksquare$

Stwierdzenie 11.

Jeśli $a \cdot b = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$.

Dowód.

Mamy $a \cdot 0 = 0 = a \cdot b$, więc jeśli $a \neq 0$, to na mocy stwierdzenia 6 zachodzi $0 = b$. $\blacksquare$

Stwierdzenie 12.

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $(-a)b = a(-b) = -ab$ oraz $(-a)(-b) = ab$. W szczególności $(-1)a = -a$.

Dowód.

$a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = b \cdot 0 = 0 = a \cdot b + [-(a \cdot b)]$. Ze stwierdzenia 2 wynika, że $(-a)b = -ab$. Stąd $a(-b) = (-b)a = -ba = -ab$ i $(-a)(-b) = -a(-b) = -[(-b)a] = -[-ba] = -[-ab] = ab$ — ostatnią równość wywnioskowaliśmy ze stwierdzenia 4.

Stwierdzenie 13.

Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a(b-c) = ab - ac$.

Dowód.

Mamy $a(b-c) = a \cdot [b + (-c)] = a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b + (-a \cdot c) = ab - ac$. ■

Stwierdzenie 14.

Jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$.

Dowód.

Z tego, że $a < b$ wynika, że $a+c < b+c$. Z tego, że $c < d$ wynika, że $b+c = c+b < d+b$. Z przechodniości nierówności wynika, że $a + c < b + d$. ■

Stwierdzenie 15.

Jeśli $a < 0$, to $0 < -a$.

Dowód.

Jeśli $a < 0$, to $0 = a + (-a) < 0 + (-a) = -a$. ■

Stwierdzenie 16.

Jeśli jednocześnie $a < b$, $c < d$, $0 < b$, $0 < c$, to $ac < bd$.

Dowód.

Z tego, że $a < b$ i $0 < c$ wynika, że $ac < bc$. Z tego, że $c < d$ i $0 < b$ wynika, że $bc = cb < db = bd$. Teza wynika z przechodniości nierówności. ■

Stwierdzenie 17.

Jeśli $0 < a$ i $0 < b$, to $0 < ab$. Jeśli $0 < a$ i $b < 0$, to $ab < 0$. Jeśli $a < 0$ i $b < 0$, to $0 < ab$.

Dowód.

Pierwsza część wynika bezpośrednio z poprzedniego. Jeśli $a < 0 < b$, to $0 < -a$, więc $0 < (-a)b = -ab$, zatem $ab < (-ab) + ab = 0$. Udowodniliśmy drugą część. Jeśli $a < 0$ i $b < 0$, to $0 < -a$ i $0 < -b$, zatem $0 < (-a)(-b) = ab$. ■

Definicja cyfr

$2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $5 = 4 + 1$, $6 = 5 + 1$, $7 = 8 + 1$, $8 = 7 + 1$, $9 = 8 + 1$. ■

Definicja kwadratu

Dla każdej liczby rzeczywistej a definiujemy $a^2 = a \cdot a$.

Stwierdzenie 18.

Jeśli $a \neq 0$, to $0 < a^2$.

Dowód.

Albo $0 < a$ albo $0 < -a$. Stąd $a^2 = a \cdot a = (-a) \cdot (-a) > 0$. ■

Stwierdzenie 19.

$1 > 0$.

Dowód.

$1 = 1^2$. ■

Od tej pory będziemy również pisać $a > b$ oczywiście wtedy i tylko wtedy, gdy $b < a$. Również $a \leq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a < b$ lub $a = b$. Używany będzie też symbol $a \geq b$.

Definicja wartości bezwzględnej.

$|a| = \begin{cases} a & \text{jeżeli } a \geq 0, \\ -a & \text{jeżeli } a < 0. \end{cases}$ ■

Stwierdzenie 20.

Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to $|-a| = |a|$, $|a| \geq a$, $|ab| = |a| \cdot |b|$, $|a + b| \leq |a| + |b|$, $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
Dwie ostatnie nierówności zwane są nierównościami trójkąta.

Dowód.

Pierwsza równość jest zupełnie oczywista. Jeśli $a \geq 0$, to $|a| = a$, jeśli $a < 0$, to $|a| = -a > 0 > a$, zatem zawsze $|a| \geq a$. Stąd wynika, że $|a| + |b| \geq a + b$ oraz $|-a| + |-b| \geq -a + (-b) = -(a + b)$, a ponieważ $|a + b|$, to większa z liczb $a + b$, $-(a + b)$, więc $|a| + |b| \geq |a + b|$. Z tej nierówności wynika, że $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$, zatem $|a|-|b| \leq |a-b|$. Oczywiście $|a-b| = |b-a| \geq |b|-|a| = -(|a|-|b|)$. A dwu nierówności $|a - b| \geq |a| - |b|$ i $|a - b| \geq -(|a| - |b|)$ wynika, że $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$. ■

Uwaga

Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$, to $a = \sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq a$ dla każdego $x \in A$ i dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in A$ takie, że $a - \varepsilon < x \leq a$.
Dowód tego stwierdzenia jest całkiem oczywisty, więc go nie piszę. Sformułowanie analogicznego twierdzenia dla kresu dolnego również pozostawiam studentom. ■

Definicja

$\mathcal{N}(k)$ jest najmniejszym zbiorem spełniającym dwa warunki:

1° $k \in \mathcal{N}(k)$;

2° jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$, to również $n + 1 \in \mathcal{N}(k)$.

Zbiór $\mathcal{N}(0) =: \mathbb{N}$ nazywać będziemy zbiorem liczb naturalnych, a jego elementy liczbami naturalnymi. ■

Stwierdzenie 21.

Jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$, to $n \geq k$.

Dowód.

Niech $A = \{n \in \mathcal{N}(k)\colon \quad n \geq k\}$. Oczywiście $k \in A$. Jeśli $n \in A$, to $n \geq k$, więc $n + 1 > n \geq k$ i oczywiście $n + 1 \in N(k)$, zatem również $n + 1 \in A$. Wynika stąd, że $A \supseteq \mathcal{N}(k)$, a z definicji od razu wynika, że $A \subseteq \mathcal{N}(k)$. Wobec tego $A = \mathcal{N}(k)$, a stąd wynika natychmiast, że jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$, to $n \geq k$. ■

Stwierdzenie 22.

Jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$ i $n > k$, to $n - 1 \in \mathcal{N}(k)$.

Dowód.

Niech $A = \{k\} \cup \{n > k\colon \quad n - 1 \in \mathcal{N}(k)\}$, czyli A składa się z liczby k i tych liczb n należących do $\mathcal{N}(k)$, dla których spełniona jest teza. Jeśli $n \in A$, to $n + 1 \in \mathcal{N}(k)$, a ponieważ $n = (n + 1) - 1 \in A \subseteq \mathcal{N}(k)$, więc $n + 1 \in A$. Stąd $A \supseteq \mathcal{N}(k)$ a ponieważ $A \subseteq \mathcal{N}(k)$, więc $A = \mathcal{N}(k)$. ■

Stwierdzenie 23.

Jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$ i $m > n$ oraz $m \in \mathcal{N}(k)$, to $m \geq n+1$.

Dowód.

Niech $A = \{n \in \mathcal{N}(k)\colon \text{ jeśli } m \in \mathcal{N}(k) \text{ i } m > n, \text{ to } m \geq n+1\}$. Jeśli $m > k$ i $m \in \mathcal{N}(k)$, to $m-1 \in \mathcal{N}(k)$ (stwierdzenie 22), zatem $m-1 \geq k$, a stąd $m = m-1+1 \geq k+1$, zatem $k \in A$. Załóżmy, że $n \in A$ i $m > n+1$. Wtedy $m-1 > n$, zatem $m-1 \geq n+1$, więc $m = (m-1)+1 \geq (n+1)+1$, zatem $n+1 \in \mathcal{N}(k)$. ■

Wniosek

Jeśli $n < x < n+1$ i $n \in \mathcal{N}(k)$, to $x \neq \mathcal{N}(k)$. ■

Stwierdzenie 24. (Zasada minimum)

Jeśli $A \subseteq \mathcal{N}(k)$ i $A \neq \emptyset$, to $\inf A \in A$, słowami: *każdy niepusty podzbiór zbioru $\mathcal{N}(k)$ ma element najmniejszy, w szczególności w każdym zbiorze złożonym z liczb naturalnych jest liczba najmniejsza.*

Dowód.

Jeśli $k \in A$, to $k = \inf A$, bo $k = \inf \mathcal{N}(k)$. Załóżmy więc, że $k \notin A$ oraz że w niepustym zbiorze A nie ma liczby najmniejszej. Niech B będzie zbiorem tych liczb $n \in \mathcal{N}(k)$, dla których zachodzi nierówność $n < a$ dla każdego $a \in A$. Oczywiście $k \in B$. Jeśli $n \in B$, to $n < a$ dla każdego $a \in A$. Stąd wynika, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $n+1 \leq a$. Jeśli $n+1 \in A$, to $n+1$ jest najmniejszą liczbą w zbiorze A. Jeśli $n+1 \neq a$ dla żadnej liczby $a \in A$, to $n+1 \in B$. Jeśli więc w zbiorze A nie ma liczby najmniejszej, to zbiór B zawiera $\mathcal{N}(k)$, ale oznacza, że zbiór A jest pusty, wbrew założeniu. ■

Stwierdzenie 25. (Zasada maksimum)

Jeśli $A \subseteq \mathcal{N}(k)$, $A \neq \emptyset$ i $\sup A \in \mathbb{R}$, to $\sup A \in A$, słowami: *każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór zbioru $\mathcal{N}(k)$ ma element największy, w szczególności w każdym złożonym z liczb naturalnych zbiorze, który jest ograniczony z góry jest liczba największa.*

Dowód.

Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Niech $A \subseteq \mathcal{N}(k)$ będzie zbiorem ograniczonym z góry, którego kres górny znajduje się poza A. Niech $n > -1 + \sup A$ i $n \in \mathcal{N}(k)$ — taka liczba n istnieje, bo $-1 + \sup A < \sup A$. Wynika stąd, że $n+1 > \sup A$, zatem $n+1$ jest ograniczeniem górnym zbioru A. Ponieważ między n i $n+1$ nie ma liczb ze zbioru $A \subseteq \mathcal{N}(k)$, więc jeśli $m \in A$, to $m < n+1$, zatem $m \leq n$, a to oznacza, że n jest ograniczeniem górnym zbioru A, a ponieważ $n \in A$, więc $n = \sup A$, wbrew temu, że $\sup A \notin A$. ■

Wniosek (Zasada Archimedesa)

Zbiór $\sup \mathcal{N}(k) = +\infty$, w szczególności dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje liczba naturalna $n > x$. ■

Stwierdzenie 26.

Jeśli $m, n \in \mathcal{N}(k)$ i $m > n$, to $m - n \in \mathbb{N}$.

Dowód.

Niech $n \in \mathcal{N}(k)$. Niech A oznacza zbiór złożony z tych liczb $\nu \in \mathcal{N}(k)$, dla których $\nu \leq n$ oraz tych liczb $m \in \mathcal{N}(k)$, dla których $m - n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $k \in A$. Jeśli $m \in A$ i $m < n$, to $m+1 \leq n$, zatem

$m+1 \in A$. Jeśli $m \in A$ i $m \geq n$, to $m+1-n = (m-n)+1 \in \mathbb{N}$, bowiem $m-n \in \mathbb{N}$. Z tego wynika, że $m+1 \in A$. Stąd wynika, że $A \supseteq \mathcal{N}(k)$, a to kończy dowód. ■

Stwierdzenie 27.

Suma i iloczyn liczb naturalnych są liczbami naturalnymi.

Dowód.

Niech $n \in \mathbb{N}$. Niech $A = \{m \in \mathbb{N}: \quad m+n \in \mathbb{N}\}$. Oczywiście $0 \in A$. Jeśli $m \in A$, to $m+n \in A$, zatem $(m+1)+n = (m+n)+1 \in A$, zatem $m+1 \in A$. Wobec tego $A \supseteq \mathbb{N}$, a to oznacza, że dla każdej liczby naturalnej m suma $n+m$ też jest liczbą naturalną. Niech $B = \{m \in \mathbb{N}: \quad mn \in \mathbb{N}\}$. Ponieważ $0 \cdot n = 0 \in \mathbb{N}$, więc $0 \in B$. Jeśli $m \in B$, to $(m+1) \cdot n = mn + n \in B$, bowiem $mn \in B$ i $n \in \mathbb{N}$, więc również ich suma jest liczbą naturalną, to już wiemy. Wobec tego $B \supseteq \mathbb{N}$, a to oznacza, że iloczyn liczb naturalnych jest liczbą naturalną. ■

Definicja zbioru liczb całkowitych

Zbiorem liczb całkowitych nazywamy najmniejszy zbiór $\mathbb{Z}$ taki, że $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$ i jeśli $a, b \in \mathbb{Z}$, to również $a-b \in \mathbb{Z}$. ■

Stwierdzenie 28.

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{a \in \mathbb{R}: \quad -a \in \mathbb{N}\}$, czyli liczba jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy jest naturalna lub gdy przeciwna do niej jest naturalna.

Dowód.

Niech $A = \mathbb{N} \cup \{a \in \mathbb{R}: \quad -a \in \mathbb{N}\}$. Oczywiście zbiór A zawiera wszystkie liczby naturalne i wszystkie liczby przeciwne do liczb naturalnych. Niech $a, b \in A$. Wykażemy, że $a-b \in A$. Mamy do rozpatrzenia cztery przypadki: $a, b \in \mathbb{N}$, $-a, b \in \mathbb{N}$, $a, -b \in \mathbb{N}$ oraz $-a, -b \in \mathbb{N}$. Zaczniemy od pierwszego z nich. Jeśli $a \geq b$, to $a-b \in \mathbb{N}$ — wynika to ze stwierdzenia 26. Jeśli $a < b$, to ze stwierdzenia 26 wnioskujemy, że $b-a \in \mathbb{N}$, więc $a-b = -(b-a) \in A$. Teraz drugi przypadek: $-a, b \in \mathbb{N}$. Ze stwierdzenia 26 wnioskujemy, że $-a+b \in \mathbb{N}$, zatem $a-b = -(a-b) \in A$. Trzeci przypadek: $a-b = a+(-b)$, więc $a-b \in \mathbb{N} \subseteq A$. Czwarty przypadek $a+b = -[(-a)+(-b)]$, liczba $(-a)+(-b)$ jest naturalna jako suma liczb naturalnych, więc przeciwna do niej znajduje się w zbiorze A. Wynika stąd, że $A = \mathbb{Z}$. ■

Stwierdzenie 29.

Suma i iloczyn liczb całkowitych są liczbami całkowitymi.

Dowód.

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Wtedy $-b \in \mathbb{Z}$ i wobec tego $a+b = a-(-b) \in \mathbb{Z}$, stwierdzenie 28. $ab = -[a(-b)] = -[(-a)b] = (-a)(-b)$ a ponieważ iloczyn liczb naturalnych jest liczbą naturalną i liczba przeciwna do naturalnej jest całkowita, więc $ab \in \mathbb{Z}$. ■

Stwierdzenie 30.

W każdym niepustym, ograniczonym z góry zbiorze złożonym liczb całkowitych istnieje liczba największa. W każdym niepustym, ograniczonym z dołu zbiorze złożonym z liczb całkowitych istnieje liczba najmniejsza.

Dowód.

Niech $A \supseteq \mathbb{Z}$ będzie niepustym zbiorem i niech M będzie jego ograniczeniem górnym. Jeśli w zbiorze A znajdują się jakieś liczby naturalne, to przyjmujemy $B = A \cap \mathbb{N}$. W zbiorze B jest liczba największa, zasada maksimum. Jest ona większa od wszystkich liczb ujemnych, więc jest największą liczbą w zbiorze A. Załóżmy teraz, że w zbiorze A nie ma liczb ujemnych. Niech $C = \{x\colon \quad -x \in A\}$. Oczywiście $C \subseteq \mathbb{N}$ i $C \neq \emptyset$. Niech $c = \inf C$. Oczywiście $c \in C$, zasada minimum. Stąd wynika, że $-c \in A$. Nierówność $x \leq -c$ jest równoważna nierówności $-x \geq c$, więc jest spełniona dla każdej liczby $x \in A$. Wykazaliśmy, że zasada maksimum jest spełniona w zbiorze liczb całkowitych.

Jeśli $A \supseteq \mathbb{Z}$ będzie niepustym, ograniczonym z dołu zbiorem złożonym z liczb całkowitych, to zbiór $C = \{x\colon \quad -x \in A\}$ jest ograniczony z góry, więc ma element największy, np. c, więc $-c$ jest elementem najmniejszym zbioru A. ■

Definicja zbioru liczb wymiernych

Zbiorem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nazywamy najmniejszy zbiór taki, że $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$ i jeśli $a, b \in \mathbb{Q}$ oraz $b \neq 0$, to $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. ■

Stwierdzenie 31. Suma, różnica, iloczyn i iloraz liczb wymiernych są liczbami wymiernymi (iloraz, gdy dzielimy przez liczbę $\neq 0$). Zbiór $\mathbb{Q}$ składa się z liczb postaci $\frac{a}{b}$, gdzie $b \neq 0$.

Dowód.

Dla dowodu wystarczy wykazać, że w zbiorze liczb postaci $\frac{a}{b}$ wykonalne są działania arytmetyczne. Mamy $\frac{a}{b} \cdot [\frac{c}{d}]^{-1} = ab^{-1}[cd^{-1}]^{-1} = ab^{-1}dc^{-1} = (ad)(cb)^{-1} = \frac{ad}{bc}$, co oznacza, że w zbiorze $\mathbb{Q}$ są jedynie liczby postaci $\frac{a}{b}$. Mamy $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1} = add^{-1}(b)^{-1} + cbb^{-1}d^{-1} = [ad + bc]b^{-1}d^{-1} = [ad + bc](bd)^{-1}$. Analogicznie odejmowanie, które zresztą można sprowadzić do dodawania. Mnożenie można sprowadzić do dzielenia, a dzielenie liczb wymiernych daje w wyniku liczbę wymierną, co wynika wprost z definicji zbioru $\mathbb{Q}$. ■

Definicja potęgi

$a^0 = 1$ dla każdego $a \neq 0$, $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$. ■

Symbolu 0^0 nie definiujemy, później stanie się jasne dlaczego, aczkolwiek należy stwierdzić, że w wielu sytuacjach przyjmuje się, że $0^0 = 1$, głównie dla uproszczenia zapisu w wielu sytuacjach.

Nierówność Bernoulli'ego

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ i każdej liczby rzeczywistej $a > -1$ zachodzi nierówność $(1+a)^n \geq 1+na$.

Dowód.

Dla $n = 1$ zachodzi równość. Załóżmy, że $(1 + a)^n \geq 1 + na$ dla pewnej liczby naturalnej $n \geq 1$. Ponieważ $1 + a > 0$, więc $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \cdot (1 + a) \geq (1 + na) \cdot (1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$. Wynika stąd, że nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$. ■

Twierdzenie o istnieniu pierwiastków z liczb rzeczywistych

Jeśli $a \geq 0$ i $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $b \geq 0$ taka, że $a = b^k$. Jeśli $k \geq 1$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, tzn. **nie** istnieje liczba całkowita κ taka, że $k = 2\kappa$, a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista b taka, że $b^k = a$.

Dowód.

Udowodnimy pierwszą część tezy. Jeśli $a = 0$, to oczywiście $b = 0$. Niech $a > 0$ i $A = \{x \in \mathbb{R}\colon \quad x^k \leq a\}$. $A \neq \emptyset$, bowiem $\frac{a}{1+a} \in A$, gdyż $0 < \frac{a}{1+a} < 1$, zatem $\left(\frac{a}{1+a}\right)^k \leq \frac{a}{1+a} < a$. Jeśli $x \in A$, to $x < 1+a$, bo jeśli $x \geq 1+a$, to $x^k \geq (1+a)^k \geq 1+ka \geq 1+a > a$. Niech $b = \sup A$. Ponieważ $\frac{a}{1+a} \in A$, więc $b \geq \frac{a}{1+a} > 0$. Udowodnimy, że $b^k = a$. Załóżmy, że tak nie jest. Musi więc być albo $b^k < a$ albo $b^k > a$. Załóżmy, że $0 < k\varepsilon < b$. Z nierówności Bernoulli'ego wynika, że

$$(b+\varepsilon)^k = b^k\left(1+\frac{\varepsilon}{b}\right)^k = b^k \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\frac{\varepsilon}{b}}{1+\frac{\varepsilon}{b}}\right)^k} \leq b^k\frac{1}{1-k\frac{\frac{\varepsilon}{b}}{1+\frac{\varepsilon}{b}}} = b^k\frac{1+\frac{\varepsilon}{b}}{1-(k-1)\frac{\varepsilon}{b}} < b^k\frac{1+\frac{\varepsilon}{b}}{1-k\frac{\varepsilon}{b}}.$$

Nierówność $b^k\frac{1+\frac{\varepsilon}{b}}{1-k\frac{\varepsilon}{b}} < a$ jest równoważna nierówności $b^{k+1}+\varepsilon b^k < ab - k\varepsilon a$, czyli nierówności $\varepsilon < b\frac{a-b^k}{ka+b^k}$. Wystarczy więc przyjąć, że ε jest np. mniejszą z dwu liczb $\frac{b}{2k}$ i $\frac{b(a-b^k)}{2(ka+b^k)}$, by mieć pewność, że $(b+\varepsilon)^k < a$, co przeczy temu, że b jest ograniczeniem górnym zbioru tych liczb nieujemnych, których k-te potęgi nie przekraczają a. Wykluczona została nierówność $b^k < a$. Załóżmy, że $b^k > a$. Niech $0 < \varepsilon < b$. Mamy $(b-\varepsilon)^k = b^k\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^k \geq b^k(1-k\frac{\varepsilon}{b})$. Wynika stąd, że jeśli $b^k(1-k\frac{\varepsilon}{b}) > a$, czyli gdy $\varepsilon < \frac{b^k-a}{kb^{k-1}}$, to $(b-\varepsilon)^k > a$, co przeczy temu, że b jest **najmniejszym** ograniczeniem górnym zbioru A, mniejszym jest bowiem $b-\varepsilon$. Wobec tego nie może mieć miejsca nierówność $a < b^k$. Wykluczone zostały obie nierówności, więc musi zachodzić równość $b^k = a$ Jest tylko jedna taka liczba b bowiem z nierówności $0 \leq b_1 < b_2$ wynika, że $b_1^k < b_2^k$.

Dowód w przypadku $a < 0$ i nieparzystego k pozostawiamy studentom w charakterze łatwego ćwiczenia. Można go sprowadzić do już udowodnionej części tezy korzystające z tego, że jeśli k jest nieparzyste, to $(-y)^k = -y^k$ i z tego, że jeśli $y_1 < y_2$, to $y_1^k < y_2^k$. ■

Definicja części całkowitej

Częścią całkowitą $\lfloor x \rfloor$ liczby $x \in \mathbb{R}$ nazywamy największą liczbę całkowitą, która nie jest większa niż x. ■

Z zasady maksimum zastosowanej do zbioru liczb całkowitych wynika, że definicja ta ma sens. Jasne jest, że np. $\lfloor -3 \rfloor = -3$, $\lfloor \frac{4}{3} \rfloor = 1$, $\lfloor -\frac{4}{3} \rfloor = -2$.

Stwierdzenie 32.

Zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest niepusty, np. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Dowód.

Ponieważ $(\sqrt{3})^2 = 3$ i $0 < \sqrt{3}$, więc $1 < \sqrt{3} < 2$, bowiem z nierówności $0 < x \leq 1$ wynika, że $x^2 \leq 1$, co wyklucza nierówność $\sqrt{3} \leq 1$, a z nierówności $2 \leq x$ wynika, że $4 \leq x^2$, co wyklucza nierówność $2 \leq \sqrt{3}$. Załóżmy, że $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, czyli że $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$. Ponieważ $0 < \frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$, więc można założyć, że $p, q \in \mathbb{N}$. Istnieją więc liczby naturalne $q > 0$ takie, że $q \cdot \sqrt{3} \in \mathbb{N}$. Niech n_0 oznacza najmniejszą z nich (zasada minimum). Niech $n_1 = n_0(\sqrt{3}-1)$. Ponieważ $0 < \sqrt{3}-1 < 1$, więc $n_1 < n_0$. Ponieważ $n_0, n_0\sqrt{3} \in \mathbb{N}$ i $n_0 < n_0\sqrt{3}$, więc $n_1 = n_0\sqrt{3} - n_0 \in \mathbb{N}$. Mamy też $n_1\sqrt{3} = 3n_0 - n_0\sqrt{3} \in \mathbb{N}$, bo obie liczby $3n_0$ i $n_0\sqrt{3}$ są naturalne oraz $n_0\sqrt{3} < 3n_0$. Uzyskany wynik jest sprzeczny z definicją n_0 jako *najmniejsze* liczby dodatniej dla której $n_0\sqrt{3} \in \mathbb{N}$. Dowód został zakończony. ■

Prawdziwe jest twierdzenie nieco ogólniejsze: Jeśli $a \in \mathbb{N}$, to zachodzi jedna z dwu możliwości $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. Podany przed chwilą dowód Dedekinda niewymierności liczby $\sqrt{3}$ należy nieco zmienić: liczbę n_0 należy mnożyć przez $\sqrt{a} - \lfloor \sqrt{a} \rfloor$ zamiast przez $\sqrt{3} - 1$.

Ćwiczenie

Udowodnić metodą Dedekinda, że jeśli $k, a \in \mathbb{N}$ i $k > 1$, to albo, to $\sqrt[k]{a} \in \mathbb{N}$ albo $\sqrt[k]{a} \notin \mathbb{Q}$. ☒

Twierdzenie o gęstości zbioru $\mathbb{Q}$ w zbiorze $\mathbb{R}$

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ z tego, że $a < b$ wynika, że istnieje liczba wymierna w taka, że $a < w < b$.

Dowód.

Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie taką liczbą naturalną, że $\frac{1}{n} < b - a$. Niech $A = \{m \in \mathbb{Z}\colon \ \frac{m}{n} \leq a\}$. Zbiór A jest niepusty, bo istnieje liczba naturalna $-m$ taka, że $-m > -na$ (zasada Archimedesa). Zbiór A jest ograniczony z góry, bo nierówność $\frac{m}{n} \leq a$ jest równoważna nie równości $m \leq na$, czyli na jest ograniczeniem górnym zbioru A. Niech $k = \sup A$. Z zasady maksimum wynika, że wynika, że $k \in A$, zatem $\frac{k}{n} \leq a$. Stąd wynika, że $\frac{k+1}{n} = \frac{k}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$. Ponieważ $k + 1 \notin A$, więc $a < \frac{k+1}{n}$. Mamy więc $a < \frac{k+1}{n} < b$. Przyjmujemy więc $w = \frac{k+1}{n}$. ■

Twierdzenie o gęstości zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ w zbiorze $\mathbb{R}$

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ z tego, że $a < b$ wynika, że istnieje liczba niewymierna x taka, że $a < x < b$.

Dowód.

Nie będziemy przytaczać całego dowodu. Można powtórzyć dowód twierdzenia poprzedniego korzystając z tego, że jeśli $p, g \in \mathbb{Z}$ i $p \neq 0 \neq$, to liczba $\frac{p}{q}\sqrt{3}$ jest niewymierna. Różnica polega na tym, że tym razem liczbę $n \in \mathbb{N}$ wybieramy tak, by $\frac{\sqrt{3}}{n} < \frac{b-a}{2}$ i rozpatrujemy liczby postaci $\frac{m\sqrt{3}}{n}$. Wykazujemy, że dla co najmniej dwu z nich spełniona jest nierówność $a < \frac{m\sqrt{3}}{n} < b$, co gwarantuje, że jedna z nich jest różna od 0, więc jest niewymierna. ■

Przykład

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ — wynika to z zasady Archimedesa. ■

Dowód.

Niech (a_n) będzie ciągiem niemalejącym i ograniczonym z góry przez liczbę M. Definiujemy kandydatkę na granicę $g = \sup\{a_n\colon \ n \in \mathcal{N}(k)\}$. Jeśli $\varepsilon > 0$, to liczba $g - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru $\{a_n\colon \ n \in \mathcal{N}(k)\}$, więc istnieje liczba n_ε taka, że $a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Wobec tego dla $n \geq n_\varepsilon$ mamy $a \geq a_n > g - \varepsilon$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. ■

Przykład.

Jeśli $|q| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Równość jest oczywista dla $q = 0$, bo wtedy niezależnie od ε można przyjąć, że $n_\varepsilon = k$. Jeśli $0 < |q| < 1$, to przyjmując $\frac{1}{|q|} = 1 + r$ otrzymujemy $0 < |q|^n < \varepsilon$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(1+r)^n = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$, a na to, by ta ostatnia nierówność zachodziła wystarcza, że $n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{r}$, bowiem z nierówności Bernoulli'ego wynika, że $(1+r)^n \geq 1 + nr$. ■

Twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy

A1. Jeśli istnieją granice $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$, to istnieje granica $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ i zachodzi wzór:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

A2. Jeśli istnieją granice $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$, to istnieje granica $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ i zachodzi wzór:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

A3. Jeśli istnieją granice $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$, to istnieje granica $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ i zachodzi wzór:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

A4. Jeśli istnieją granice $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ i zachodzi wzór:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\,. \qquad \boxtimes$$

Zanim udowodnimy to twierdzenie, sformułujemy następne.

Twierdzenie o szacowaniu

N1. Jeśli $C < \lim_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $C < a_n$.

N2. Jeśli $C > \lim_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $C > a_n$.

N3. Jeśli $\lim_{n\to\infty} b_n < \lim_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $b_n < a_n$.

N4. Jeśli $b_n \le a_n$ dla dostatecznie dużych n, to zachodzi nierówność $\lim_{n\to\infty} b_n \le \lim_{n\to\infty} a_n$. $\boxtimes$

Dowód.

Zaczniemy od N1. Przypomnijmy, że liczba C jest mniejsza od granicy ciągu (a_n). Mamy wykazać, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $C < a_n$. Przyjmijmy $\varepsilon = \lim_{n\to\infty} a_n - C$. Z definicji od razu wynika, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $|a_n - \lim_{n\to\infty} a_n| < \varepsilon$, więc $a_n > \lim_{n\to\infty} a_n - \varepsilon = C$.
W taki sam sposób udowodnić można N2 – trzeba jedynie zmienić kierunki niektórych nierówności.
Teraz załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} b_n < \lim_{n\to\infty} a_n$. Istnieje liczba C taka, że $\lim_{n\to\infty} b_n < C < \lim_{n\to\infty} a_n$. Na mocy już udowodnionej części twierdzenia dla dostatecznie dużych n zachodzą nierówności $b_n < C$ oraz $C < a_n$. Z nich wynika od razu, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n mamy $b_n < a_n$, co kończy dowód części N3.
Załóżmy, że od pewnego momentu zachodzi nierówność $b_n \le a_n$, chcemy natomiast wykazać, że $\lim_{n\to\infty} b_n \le \lim_{n\to\infty} a_n$. Jeśli tak nie jest, to $\lim_{n\to\infty} b_n > \lim_{n\to\infty} a_n$. Stąd jednak wynika, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $b_n > a_n$ sprzeczna z założeniem. Dowód twierdzenia o szacowaniu został zakończony.■

Wniosek z twierdzenia o szacowaniu – jednoznaczność granicy

N5 Ciąg ma co najwyżej jedną granicę.

Dowód.

Gdyby miał dwie np. $g_1 < g_2$, to wybrać moglibyśmy liczbę C leżącą między g_1 i g_2: $g_1 < C < g_2$. Wtedy dla dostatecznie dużych n byłoby jednocześnie $a_n < C$ (zob. N2) oraz $a_n > C$ (zob. N1), co oczywiście nie jest możliwe. ■

Wniosek z twierdzenia o szacowaniu – ograniczoność ciągu o granicy skończonej

N6. Jeśli ciąg (a_n) ma granicę, to istnieją liczby rzeczywiste C, D takie, że dla **wszystkich** n zachodzi nierówność $C < a_n < D$, czyli ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu liczbą C zaś z góry liczbą D. ■

Uwaga. Ten dowód jest bardzo prosty. Proszę jednak zwrócić uwagę na to, że *spośród skończenie wielu liczb można zawsze wybrać najmniejszą* a spośród nieskończenie wielu niekoniecznie, np. wśród liczb $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ najmniejszej nie ma! ■

Twierdzenie o trzech ciągach

N7. Jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla dostatecznie dużych n i ciągi (a_n) oraz (c_n) mają *równe* granice, to ciąg (b_n) też ma granicę i zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Dowód.

Wiemy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność podwójna $a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz że ciągi a_n i c_n mają wspólną granicę g. Mamy dowieść, że ta wspólna granice jest również granicą ciągu (b_n). Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Istnieje liczba naturalna n_ε, taka że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g| < \varepsilon$ oraz $|c_n - g| < \varepsilon$. Wynika stąd, że $g - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < g + \varepsilon$, zatem $|b_n - g| < \varepsilon$. Udowodniliśmy więc, że $g = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga o zbieżności ciągu przeciwnego

Zauważmy teraz, że ciąg (c_n) ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(-c_n)$ ma granicę oraz że zachodzi wtedy równość $\lim_{n\to\infty}(-c_n) = -\lim_{n\to\infty} c_n$. ■

Ta bardzo prosta uwaga wielokrotnie pozwoli nam na zmniejszenie liczby przypadków rozważanych w dowodach.

Teraz zajmiemy się twierdzeniem o arytmetycznych własnościach granicy ciągu. Udowodnimy, że suma granic dwóch ciągów jest granicą sumy tych ciągów. Załóżmy, że $g_a = \lim_{n\to\infty} a_n$ i $g_b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Niech ε będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech n'_ε będzie taką liczbą naturalną, że dla $n > n'_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_n - g_a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Niech n''_ε będzie taką liczbą naturalną, że nierówność $|b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2}$ zachodzi dla $n > n''_\varepsilon$ i niech n_ε oznacza większą z liczb $n'_\varepsilon, n''_\varepsilon$. Wtedy dla $n > n_\varepsilon$ zachodzą obydwie nierówności, zatem

$$|a_n + b_n - (g_a + g_b)| \leq |a_n - g_a| + |b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Znaczy to, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n ($n > n_\varepsilon$) różnica $(a_n + b_n) - (g_a + g_b)$ ma wartość bezwzględną mniejszą niż ε, więc $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = g_a + g_b$. Dowód twierdzenia o granicy sumy ciągów został zakończony.

Z uwagi o zbieżności ciągu przeciwnego i twierdzenia o granicy sumy (A1) wynika od razu twierdzenie o granicy różnicy (A2).

Zajmiemy się teraz iloczynem. Z twierdzenia o szacowaniu wynika, że każdy z tych ciągów jest ograniczony, więc istnieje liczba $K' > 0$ taka, że $|a_n| \leq K'$ i istnieje też liczba K'' taka, że $|b_n| < K''$ dla każdej liczby naturalnej n. Przyjmując, że K to większa z liczb K', K'' znajdujemy liczbę, której nie przekracza wartość bezwzględna żadnego wyrazu któregokolwiek z dwóch rozpatrywanych ciągów: $|a_n|, |b_n| \leq K$. Niech

$g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Z twierdzenia o szacowaniu wnioskujemy, że również $|g_a|, |g_b| \leq K$. Niech ε oznacza dowolną liczbę dodatnią. Istnieje wtedy liczba naturalna n_ε , taka że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g_a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ i jednocześnie $|b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Wtedy

$$|a_n b_n - g_a g_b| = |(a_n - g_a)b_n + g_a(b_n - g_b)| \leq |a_n - g_a| \cdot |b_n| + |g_a| \cdot |b_n - g_b| < \tfrac{\varepsilon}{2K} \cdot K + K \cdot \tfrac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Udowodniliśmy więc, że dla dostatecznie dużych n odległość liczby $a_n b_n$ od liczby $g_a g_b$ jest mniejsza niż ε, co oznacza, że $g_a g_b = \lim\limits_{n\to\infty} \big(a_n \cdot b_n\big)$, a to właśnie było naszym celem.

Pozostała ostatnia część – twierdzenie o granicy ilorazu. Niech $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i niech $0 \neq g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g_a}{g_b}$. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z poczynionych założeń wynika, że istnieje liczba naturalna n_ε , taka że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|b_n| > \frac{|g_b|}{2}$, $|a_n - g_a| < \frac{\varepsilon \cdot |g_b|}{4}$, $|b_n - g_b| < \frac{\varepsilon \cdot |g_b|^2}{4(|g_a|+1)}$.*
Dla $n > n_\varepsilon$ mamy więc

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{g_a}{g_b}\right| = \frac{|a_n g_b - g_a b_n|}{|g_b b_n|} \leq \frac{|a_n g_b - g_a g_b| + |g_a g_b - g_a b_n|}{|g_b|^2/2} = \frac{2}{|g_b|}|a_n - g_a| + \frac{2|g_a|}{|g_b|^2}|g_b - b_n| < \varepsilon.$$

Twierdzenie zostało udowodnione. ■

Lemat o granicach n-tych potęg ciągów „szybko zbieżnych” do 1

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^n = 1$.

Dowód.

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$, więc istnieje n_0 takie, że jeśli $n > n_0$, to $|n \cdot a_n| < \frac{1}{2}$.
Wtedy $|a_n| = \frac{1}{n} \cdot (|n \cdot a_n|) < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej $n > n_0$ zachodzą nierówności: $n \cdot a_n > -\frac{1}{2} > -1$, $\frac{a_n}{1+a_n} > -1$ oraz $\frac{n \cdot a_n}{1+a_n} < 1$, co usprawiedliwia dwukrotne stosowanie nierówności Bernoulli'ego w wierszu poniżej

$$1 + n \cdot a_n \leq (1 + a_n)^n = \frac{1}{\Big(1 - \frac{a_n}{1+a_n}\Big)^n} \leq \frac{1}{1 - \frac{na_n}{1+a_n}}$$

Czytelnik zwróci uwagę na to, że dzięki wyborowi n_0 stosowanie nierówności Bernoulli'ego prowadzi do wyrażeń dodatnich, więc przejście do ich odwrotności jest usprawiedliwione – stosowaliśmy nierówność Bernoulli'ego do mianownika! Teza lematu wynika z twierdzenia o trzech ciągach, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + n \cdot a_n) =$
$=1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 - \frac{na_n}{1+a_n}}$. Lemat został udowodniony. ■

Ciąg $\big((1 + \frac{x}{n})^n\big)$

Wypiszmy przybliżenia dziesięciu pierwszych wyrazów ciągu

w przypadku $x = 1$:

$\big(1 + \frac{1}{1}\big)^1 = 2$

$\big(1 + \frac{1}{2}\big)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$

$\big(1 + \frac{1}{3}\big)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,37$

oraz w przypadku $x = -4$:

$\big(1 + \frac{-4}{1}\big)^1 = -3$

$\big(1 + \frac{-4}{2}\big)^2 = 1$

$\big(1 + \frac{-4}{3}\big)^3 = \frac{-1}{27} \approx -0,37$

* Nie założyliśmy, że $g_a \neq 0$, więc w mianowniku umieściliśmy $|g_a|+1$.

$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\frac{625}{256}\approx 2,44$ $\left(1+\frac{-4}{4}\right)^4=0$

$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5=\frac{7776}{3125}\approx 2,49$ $\left(1+\frac{-4}{5}\right)^5=\frac{1}{3125}\approx 0,00032$

$\left(1+\frac{1}{6}\right)^6=\frac{117649}{46656}\approx 2,52$ $\left(1+\frac{-4}{6}\right)^6=\frac{1}{729}\approx 0,0014$

$\left(1+\frac{1}{7}\right)^7=\frac{2097152}{823543}\approx 2,55$ $\left(1+\frac{-4}{7}\right)^7=\frac{2187}{823543}\approx 0,0027$

$\left(1+\frac{1}{8}\right)^8=\frac{43046721}{16777216}\approx 2,56$ $\left(1+\frac{-4}{8}\right)^8=\frac{1}{256}\approx 0,0039$

$\left(1+\frac{1}{9}\right)^9=\frac{1000000000}{387420489}\approx 2,58$ $\left(1+\frac{-4}{9}\right)^9=\frac{1953125}{387420489}\approx 0,0050$

$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=\frac{25937424601}{10000000000}\approx 2,59$ $\left(1+\frac{-4}{10}\right)^{10}=\frac{59049}{9765625}\approx 0,0060$

Łatwo można przekonać się, że ciąg o wyrazie $a_n=(1+\frac{x}{n})^n$ nie jest ani geometryczny , ani arytmetyczny z wyjątkiem jednego przypadku: $x=0$. **Wykażemy, że jeśli $n>-x\neq 0$, to $a_{n+1}>a_n$, czyli że ciąg ten jest rosnący** *od pewnego momentu*. W przypadku $x>0$ jest rosnący, gdy $x<0$, to może się zdarzyć, że początkowe wyrazy zmieniają znak, więc o monotoniczności nie może być nawet mowy. Jeśli jednak wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie, to jest niemalejący. Wypada to wykazać. Z nierówności $n>-x$ wynika od razu nierówność $n+1>-x$. Z pierwszej z nich wnioskujemy, że $1+\frac{x}{n}>0$, a z drugiej – że $1+\frac{x}{n+1}>0$. Nierówność $a_n<a_{n+1}$ równoważna jest nierówności $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$, a ta – dzięki temu, że $1+\frac{x}{n}>0$ – nierówności $\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}>\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}=\frac{n}{n+x}$. Skorzystamy teraz z nierówności Bernoulli'ego (punkt 10.), by udowodnić, że ostatnia nierówność ma miejsce dla $n>-x$. Mamy $\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1}\geq 1-(n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)}=1-\frac{x}{n+x}=\frac{n}{n+x}$. Dla jasności należy jeszcze zauważyć, że liczba $\frac{-x}{(n+x)(n+1)}$, pełniąca rolę a w nierówności Bernoulli'ego, jest większa od -1 – jest to oczywiste w przypadku $x\leq 0$, bo w tym przypadku jest ona nieujemna, zaś dla $x>0$ jej wartość bezwzględna, czyli $\frac{x}{(n+x)(n+1)}$ jest mniejsza od $\frac{1}{n+1}<1$. Wykazaliśmy więc, że od momentu, w którym wyrażenie $(1+\frac{x}{n})$ staje się dodatnie, ciąg zaczyna rosnąć (w przypadku $x=0$ jest stały). Dodajmy jeszcze, że jeśli $x>0$, to wyrazy ciągu są dodatnie, jeśli zaś $x<0$, to są one dodatnie dla n parzystego oraz dla n nieparzystego, o ile $n>-x$.

Jeśli $x<0$ i $n>-x$, to $0<1+\frac{x}{n}<1$, zatem $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<1$. Ciąg jest więc w przypadku $x<0$ niemalejący od pewnego miejsca i ograniczony z góry, ma zatem granicę. Granica ta jest dodatnia, bo takie są wyrazy ciągu od pewnego miejsca i wyrazy te rosną wraz z n. Jeśli $x=0$, to wszystkie wyrazy ciągu są równe 1, więc jego też. Jeśli $x>0$, to $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\dfrac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$. Mianownik ma dodatnia granicę — to już wykazaliśmy. mamy też $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{-x^2}{n^2}=0$, zatem granicą licznika jest liczba 1. Z twierdzenia o granicy ilorazu natychmiast wynika, że ciąg $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ ma granicę również dla $x>0$.

Oznaczenie

$\exp(x)$ oznaczać będzie w dalszym ciągu granicę ciągu $\left((1+\frac{x}{n})^n\right)$, tzn.

$$\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Wobec tego symbol $\exp$ oznacza funkcję, która jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, jej wartością w punkcie x jest liczba dodatnia $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. ■

Równanie podstawowe

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość: $\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$.

Skorzystamy z określenia liczby $\exp(x)$ i tego, że jest to liczba dodatnia, co udowodniliśmy wcześniej. Równość, którą mamy udowodnić, jest równoważna temu, że $\frac{\exp(x)\cdot\exp(y)}{\exp(x+y)}=1$. Mamy

$$\frac{\exp(x)\cdot\exp(y)}{\exp(x+y)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n=1$$

Ostatnia równość wynika z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 i z tego, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)=0.\ ■$$

Stwierdzenie 33.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi wzór $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$.

Mamy $\exp(0)=\exp(0+0)=\exp(0)\cdot\exp(0)$, a ponieważ $\exp(0)$ jest liczbą dodatnią, więc $\exp(0)=1$.*
Wobec tego $1=\exp(0)=\exp(-x+x)=\exp(-x)\cdot\exp(x)$, zatem zachodzi wzór $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$. ■

Definicja potęgi o wykładniku wymiernym

Jeśli $a>0$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, to $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$. ■

Dla $a<0$ są kłopoty z definicja i z własnościami funkcji wykładniczej, więc w wielu szkołach nauczyciele po prostu zakładają, że podstawa potęgi musi być dodatnia. To samo założenie przyjmują również autorzy wielu znanych programów komputerowych i dzieła ich autorstwa nie lubią wyrażeń typu $(-8)^{1/3}$. Zapewne po drodze, w obliczeniach, programy takie używają logarytmów. Autor tego tekstu jednak dopuszcza ujemną podstawę w następującej sytuacji $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, nie istnieje $x\in\mathbb{Z}$ takie, że $q=2x$, czyli q jest nieparzyste i nie istnieją $k,l,m\in\mathbb{Z}$ takie, że $m>1$, $p=km$ i jednocześnie $q=lm$, czyli p,q są względnie pierwsze. Jeśli $a>0$ i $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$, $p,r\in\mathbb{Z}$, $q,s\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, to $\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[s]{a^r}$, bowiem ta równość równoważna jest temu, że $\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{qs}=\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^{qs}$, czyli $a^{ps}=a^{qr}$ (twierdzenie o istnieniu pierwiastka), a to wynika z tego, że $ps=qr$. Stąd wynika, że definicja potęgi o wykładniku wymiernym jest zależna od wykładnika a nie od jego przedstawienia w postaci ilorazu licz całkowitych. Te uwagi nie dotyczą potęgowania, gdy podstawa jest ujemna: $(-1)^{1/3}=\sqrt[3]{(-1)^1}=-1$, ale $(-1)^{2/6}=\sqrt[6]{(-1)^2}=1$, więc nawet definicja w przypadku ujemnej podstawy nie jest całkiem w porządku. Tym nie mniej często jest wygodnie stosować zapis $a^{p/q}$ w przypadku ujemnego a, ale wtedy trzeba zdawać sobie sprawę z ograniczeń w twierdzeniach dotyczących potęg, czyli mieć świadomość, że mogą pojawić się jakieś dziwne kłopoty.

Stwierdzenie 34.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x, dowolnej liczby całkowitej p i dowolnej dodatniej liczby całkowitej q zachodzi wzór: $\exp(\frac{p}{q}x)=(\exp(x))^{p/q}$.

Jeśli m jest liczbą naturalną, y – rzeczywistą to $\exp(my)=\exp(y+y+\ldots+y)=$

* inny dowód: $\exp(0)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}1=1$.

$= \exp(y) \cdot \exp(y) \cdot \ldots \cdot \exp(y) = (\exp(y))^m$. Stąd wynika, że $\exp(\frac{x}{q}) = \sqrt[q]{\exp(x)} = (\exp(x))^{1/q}$ – stosujemy poprzedni wzór przyjmując $y = \frac{x}{m}$ i $m = q$. Dla $p > 0$, zachodzi więc równość $\exp(\frac{p}{q}x) = \left(\exp(\frac{x}{q})\right)^p = \left((\exp(x))^{1/q}\right)^p = (\exp(x))^{p/q}$. Teraz załóżmy, że $p < 0$. Mamy wobec tego $\exp(\frac{p}{q}x) = \frac{1}{\exp(\frac{-p}{q}x)} = \frac{1}{(\exp(x))^{-p/q}} = (\exp(x))^{p/q}$. Udowodniliśmy więc wzór, który chcieliśmy wykazać. ■

Definicja liczby e

Liczbą e nazywamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, czyli $e = \exp(1)$.
Liczbą tą zajmował się intensywnie jako pierwszy L.Euler, matematyk szwajcarski zatrudniany przez Petersburską Akademię Nauki (1727-1744,1766-1783) i Berlińską Akademię Nauki (1744-1766). Liczba ta ma duże znaczenie w matematyce. Z punktu widzenia tego wykładu jest to najważniejsza podstawa potęg i logarytmów. Z tego, co wykazaliśmy do tej pory, wynika, że $\exp(w) = e^w$ dla każdej liczby wymiernej w – we wzorze ze stwierdzenia 34 przyjmujemy $x = 1$ oraz $\frac{p}{q} = w$. Wiemy też, że $e = \exp(1) \geq 1 + 1 = 2$. ■

Stwierdzenie 35.

Dla każdej liczby rzeczywistej $x < 1$, zachodzi nierówność podwójna $1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

Dowód.

Jeśli $n > -x$, to $\frac{x}{n} > -1$. Z nierówności Bernoulii'ego wynika, że $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{x}{n} = 1 + x$. Stąd wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \lim\limits_{n\to\infty}(1 + n\frac{x}{n}) = 1 + x$. Wobec tego lewa nierówność zachodzi i to dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Zajmiemy się prawą. Mamy $\exp(-x) \geq 1 - x$, co wynika z nierówności $\exp(x) \geq 1 + x$ po zastąpieniu liczby x liczbą $(-x)$. Stąd $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1-x}$. ■

Stwierdzenie 36. (Ciągłość funkcji $\exp$)

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(x)$.

Dowód.

Dokładnie ta własność funkcji wykładniczej jest nazywana jej ciągłością. Własnościami funkcji ciągłych i różnymi określeniami ciągłości zajmiemy się później. Teraz udowodnimy, że funkcja $\exp$ jest ciągła. Załóżmy, że $|h| < \frac{1}{2}$. Wtedy $h \leq \exp(h) - 1 \leq \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h}$. Stąd wynika, że jeśli $|h| < \frac{1}{2}$, to $|\exp(h) - 1| \leq 2|h|$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $|x_n - x| < \frac{1}{2}$, zatem

$$0 \leq |\exp(x_n) - \exp(x)| = |\exp(x)\,(\exp(x_n - x) - 1)\,| \leq \exp(x) \cdot 2 \cdot |x_n - x|.$$

Dowodzona teza wynika więc z twierdzenia o trzech ciągach. ■

Stwierdzenie 37. (Charakteryzacja funkcji wykładniczej)

Załóżmy, że na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych określona jest funkcja f, taka że

(i) jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, tzn. funkcja f jest ciągła;

(ii) dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzi równość $f(x+y) = f(x)f(y)$;

(iii) $f(1) = e = \exp(1)$.

Twierdzenie w istocie rzeczy mówi, że własności (i) oraz (ii) są podstawowymi własnościami funkcji wykładniczej. Własność (iii) ustala podstawę potęgi, gdyby w tym twierdzeniu opuścić założenie (iii), to teza brzmiałaby $f(x) = (f(1))^x$. Udowodnimy to twierdzenie.

Dowód.

Mamy $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}) \cdot f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$. Jeśli dla pewnej liczby rzeczywistej x_1 zachodzi równość $f(x_1) = 0$, to $f(x) = f(x_1)f(x - x_1) = 0$ dla każdej liczby x. Wobec tego albo funkcja f jest dodatnia w każdym punkcie, albo jest równa 0 w każdym punkcie. W naszym przypadku $f(1) \neq 0$, zatem nasza funkcja przyjmuje jedynie wartości dodatnie. Rozumując tak jak w przypadku funkcji $\exp$, zob. dowód stwierdzenia 34, stwierdzamy bez trudu, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x, dowolnej liczby całkowitej p i dowolnej całkowitej liczby dodatniej q zachodzi równość $f(\frac{p}{q}x) = (f(x))^{p/q}$. W szczególności ma to miejsce dla $x = 1$, a to oznacza, że $f(\frac{p}{q}) = (f(1))^{p/q} = e^{p/q} = \exp(\frac{p}{q})$. Wykazaliśmy zatem, że funkcja f pokrywa się z funkcją $\exp$ na zbiorze wszystkich liczb wymiernych. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x, istnieje ciąg liczb wymiernych (w_n), którego granicą jest x. Wobec tego, dzięki ciągłości funkcji f i funkcji $\exp$ możemy napisać: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(w_n) = \exp(x)$. ■

Autor nie ma pojęcia, jak obecnie w szkołach definiowana jest potęga o wykładniku niewymiernym, zresztą to może zależeć od nauczyciela, podręcznika, plam na Słońcu i innych czynników, podejrzewa, że większość maturzystów nie potrafi powtórzyć żadnej definicji. W istocie rzeczy wszystkie definicje w jawnej lub niejawnej formie muszą odwoływać się do ciągłości i określenia wartości funkcji w przypadku argumentów wymiernych. Jedna z możliwości ominięcia tej długiej drogi to przyjęcie, że $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Wtedy od razu mamy do dyspozycji różne twierdzenia o granicach, a z nich wynikają łatwo własności funkcji wykładniczej.

Stwierdzenie 38 (Funkcja $\exp$ jest ściśle rosnąca)

Dowód.

Niech $x < y$. Wtedy $\exp(y) = \exp(y - x) \cdot \exp(x) > (1 + y - x) \cdot \exp(x) > \exp(x)$. ■

Twierdzenie o zbiorze wartości funkcji wykładniczej $\exp$**.**

Dla każdej liczby rzeczywistej $y > 0$ istnieje liczba x, taka że $y = e^x = \exp(x)$.

Dowód.

Ponieważ $e^n \geq 1 + n$, więc dla każdej liczby rzeczywistej y istnieje liczba naturalna n taka, że $e^n > y$. Ponieważ $e^{-n} \leq \frac{1}{1-(-n)} = \frac{1}{1+n}$, więc dla każdej liczby dodatniej y istnieje liczba naturalna n taka, że $y \geq \frac{1}{n+1}$. Stąd wynika, że istnieje liczba naturalna n, taka że $e^{-n} < y < e^n$. Zbiór $A = \{h \in \mathbb{R}\colon \quad e^h < y\}$ jest niepusty, bo $e^{-n} < y$ i ograniczony z góry przez n. Niech $x = \sup A$. Udowodnimy, że $y = e^x$. Są trzy możliwości $e^x < y$, $e^x > y$ i $e^x = y$. Załóżmy, że $e^x < y$. Niech $\delta > 0$ oznacza taką liczbę, że $e^\delta < \frac{y}{e^x}$. Liczba δ istnieje, bo $e^\delta \leq \frac{1}{1-\delta}$ dla $\delta < 1$, więc wystarcza, by $\frac{1}{1-\delta} < \frac{y}{e^x}$, czyli, by $\delta < 1 - \frac{e^x}{y}$, np. $\delta = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{e^x}{y}\right)$. Wobec tego $e^{x+\delta} = e^x \cdot e^\delta < y$, zatem $x + \delta \in A$ wbrew temu, że x jest ograniczeniem górnym zbioru A. Załóżmy dla odmiany, że $e^x > y$. Wykażemy, że istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $e^{x-\delta} > y$. Nierówność ta jest równoważna temu, że $e^\delta < \frac{e^x}{y}$. Jeśli $\delta < 1$, to $e^\delta \leq \frac{1}{1-\delta}$, więc wystarczy, by $\frac{1}{1-\delta} < \frac{e^x}{y}$ czyli, by $\delta < 1 - \frac{y}{e^x}$, np. $\delta = \frac{1}{2}(1 - \frac{y}{e^x})$. Wynika stąd jednak, że jeśli $h \geq x - \delta$, to $e^h > y$, zatem $x - \delta < x$ jest ograniczeniem górnym zbioru a wbrew temu, że x jest *najmniejszym* ograniczeniem górnym zbioru A.

Uwaga

Funkcja wykładnicza o podstawie e jest ściśle rosnąca, tzn. jeśli $x_1 < x_2$, to $e^{x_1} < e^{x_2}$, zatem dla każdej liczby $y > 0$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x taka, że $y = e^x$. $\blacksquare$

Definicja logarytmu naturalnego

$\ln y = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = e^x$. $\blacksquare$

Stwierdzenie 39 (Oszacowania logarytmu)

Jeśli $x > -1$, to $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Dowód.

Jeśli $0 < 1+x$, to z nierówności $1+x \leq e^x$ wynika, że $\ln(1+x) \leq \ln\left(e^x\right) = x$. Jeśli $0 < 1+x$, to $\frac{x}{1+x} < 1$, zatem $e^{x/(1+x)} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{1+x}} = 1+x$, zatem $\frac{x}{1+x} = \ln\left(e^{x/(1+x)}\right) \leq \ln(1+x)$. $\blacksquare$

Ćwiczenie

Wykazać, że jeśli (a_n) jest takim ciągiem, że $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n = 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n) = 0$. $\boxtimes$

Stwierdzenie 40 Pochodna funkcji wykładniczej

Jeśli ciąg $h_n \neq 0$ dla każdego n i $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp(x+h_n)-\exp(x)}{h_n} = \exp(x)$.

Dowód.

Wystarczy wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp(h_n)-1}{h_n} = 1$, gdyż $\frac{\exp(x+h_n)-\exp(x)}{h_n} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(h_n)-1}{h_n}$.

Załóżmy, że $0 \neq h < \frac{1}{2}$. Stąd $0 < \frac{1}{1-h} < 2$. Mamy $\frac{\exp(h)-1}{h} - 1 = \frac{\exp(h)-1-h}{h}$. Ze znanej już nierówności $\frac{1}{1-h} \geq \exp(h) \geq 1+h$ wynika natychmiast, że

$$0 \leq \exp(h) - 1 - h \leq \frac{1}{1-h} - 1 - h = \frac{h^2}{1-h} = \frac{|h|}{1-h} \cdot |h|.$$

Po podzieleniu tej nierówności stronami przez $|h|$ otrzymujemy

$$0 \leq \left|\frac{\exp(h)-1}{h} - 1\right| = \left|\frac{\exp(h)-1-h}{h}\right| \leq \frac{1}{1-h} \cdot |h| < 2|h|.$$

Z tej nierówności i z twierdzenia o trzech ciągach dowodzona teza wynika natychmiast. $\blacksquare$

Potęgi, jak już pisaliśmy, można różnie definiować. Można zdefiniować, co uczyniliśmy potęgę o wykładniku wymiernym, a następnie napisać, że jeśli $a > 0$, to dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{w_n}$, gdzie (w_n) oznacza dowolny ciąg liczb wymiernych zbieżny do liczby x. Wymaga to sprawdzenia poprawności definicji tzn. sprawdzenia, że nie zależy ona od wyboru ciągu (w_n). Można postąpić nieco inaczej: jeśli $a \geq 1$, to zdefiniować $a^x = \sup\{a^w\colon \quad w < x \text{ i } w \in \mathbb{Q}\}$, co wymaga sprawdzenia potem, że $a^{u+v} = a^u \cdot a^v$ i następnych równości. Zaoszczędzimy trochę czasu przyjmując poniższą definicję.

Definicja potęgi

Jeśli $a > 0$, to przyjmujemy, że $a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$.

Podstawowe własności potęg

1. $a^{u+v} = a^u \cdot a^v$ dla dowolnego $a > 0$ i dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}$;

2. $a^{-u} = \frac{1}{a^u}$ dla dowolnego $a > 0$ i dla dowolnego $u \in \mathbb{R}$;

3. $\left(a^u\right)^v = a^{uv}$ dla dowolnego $a > 0$ i dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}$;

4. $(ab)^u = a^u \cdot b^u$ dla dowolnych $a, b > 0$ i dla dowolnego $u \in \mathbb{R}$;

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$ dla dowolnych $a, b > 0$ i dla dowolnego $u \in \mathbb{R}$;

6. $a^u < a^v$ dla dowolnego $a > 1$ oraz $u < v$;

7. $a^u < a^v$ dla dowolnego $a \in (0,1)$ oraz $u > v$;

8. $a^u < b^u$ dla dowolnych $a < b$ oraz $u > 0$;

9. $a^u > b^u$ dla dowolnych $a < b$ oraz $u < 0$;

10. $a^u = \lim\limits_{n\to\infty} a^{u_n}$ dla dowolnego $a > 0$ i dowolnego ciągu (u_n), którego granicą jest liczba u. ■

Ćwiczenie

Wykazać własności **1** − **10**. Można korzystać z udowodnionych własności funkcji exp i ln. ☒

Definicja podciągu

Jeśli (n_k) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (a_{n_k}) nazywany jest podciągiem ciągu (a_n). ■

Na przykład ciąg a_2, a_4, $a_6, \ldots$, czyli ciąg (a_{2k}) jest podciągiem ciągu (a_n) – w tym przypadku $n_k = 2k$. Ciąg a_2, a_3, a_5, a_7, $a_{11}, \ldots$ jest podciągiem ciągu (a_n) – w tym przypadku n_k jest k–tą liczbą pierwszą. Przykłady można mnożyć, ale zapewne starczy powiedzieć, że chodzi o wybranie nieskończenie wielu wyrazów wyjściowego ciągu *bez zmiany kolejności w jakiej występowały.*

Jest jasne, że jeśli g jest granicą ciągu, to jest również granicą każdego jego podciągu, wynika to od razu z definicji granicy i definicji podciągu. Łatwe w dowodzie jest też twierdzenie pozwalające na zbadanie skończenie wielu podciągów danego ciągu, *właściwie wybranych*, i wnioskowanie istnienia granicy z istnienia wspólnej granicy wybranych podciągów.

Twierdzenie o scalaniu*

Załóżmy, że z ciągu (a_n) można wybrać dwa podciągi (a_{k_n}) i (a_{l_n}) zbieżne do tej samej granicy g, przy czym każdy wyraz ciągu (a_n) jest wyrazem co najmniej jednego z tych podciągów, tzn. dla każdego n istnieje m, takie że $n = k_m$ lub $n = l_m$. Wtedy ta wspólna granica obu tych podciągów jest granicą ciągu (a_n): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Dowód.

Ten dowód jest bardzo prosty. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieją liczby n'_ε i n''_ε, takie że dla $n > n'_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_{k_n} - g| < \varepsilon$, dla $n > n''_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_{l_n} - g| < \varepsilon$. Ponieważ $k_n \to \infty$ i $l_n \to \infty$, więc istnieje n_ε, takie że jeśli $n > n_\varepsilon$ i m jest tak dobrane, że $a_n = a_{k_m}$ lub $a_n = a_{l_m}$, to $m > n'_\varepsilon$ oraz $m > n''_\varepsilon$ i wobec tego $|a_n - g| < \varepsilon$. To oznacza, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

Sformułujemy teraz bardzo ważne twierdzenie, które będzie wielokrotnie stosowane w dowodach.

Twierdzenie Bolzano – Weierstrassa

Z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg, który ma granicę skończoną.

---

* Ta nazwa to pomysł autora, który ma nadzieję, że nie jest to całkiem głupi termin.

Dowód.

Niech c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że nierówność $c \le a_n \le d$ zachodzi dla każdego n; c jest ograniczeniem dolnym ciągu (a_n), a d — górnym. Jeśli ciąg (a_n) zawiera podciąg stały, to ten właśnie podciąg jest zbieżny. Dalej zakładamy, że (a_n) nie zawiera podciągu stałego, więc że każda liczba może wystąpić jako wyraz ciągu jedynie skończenie wiele razy. Zresztą to założenie nie jest istotne dla rozumowania przeprowadzanego poniżej, jednak pozwala uniknąć pytań o szczegółową interpretację używanych sformułowań. Niech $n_1 = 1$, $c_1 = c$, $d_1 = d$. Jedna z połówek przedziału $[c, d]$ (lub obie) zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu a_n, niech $[c_2, d_2]$ będzie tą właśnie połówką (jeśli np. w przedziale $\left[c, \frac{c+d}{2}\right]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n), to przyjmujemy $c_2 = c_1 = c$ i $d_2 = \frac{c+d}{2}$, jeśli w przedziale $\left[c, \frac{c+d}{2}\right]$ jest skończenie wiele wyrazów ciągu (a_n), to w przedziale $\left[\frac{c+d}{2}, d\right]$ musi być ich nieskończenie wiele, w tym przypadku przyjmujemy $c_2 = \frac{c+d}{2}$ oraz $d_2 = d_1 = d$) i niech $n_2 > n_1$ będzie takim numerem, że $a_{n_2} \in [c_2, d_2]$. Powtarzamy przeprowadzone rozumowanie w odniesieniu do przedziału $[c_2, d_2]$ i wyrazów ciągu następujących po a_{n_2}. W wyniku tego otrzymujemy liczbę naturalną $n_3 > n_2$ oraz przedział $[c_3, d_3] \subseteq [c_2, d_2]$ zawierający nieskończenie wiele nastęnych wyrazów ciągu (a_n), w tym a_{n_3}. Dla $j = 1, 2, 3$ mamy wobec tego $c_j \le a_{n_j} \le d_j$ i $d_j - c_j = \frac{d-c}{2^j}$ oraz $c_1 \le c_2 \le c_3$ i $d_1 \ge d_2 \ge d_3$. Kontynuując to postępowanie otrzymujemy niemalejący ciąg (c_j) oraz nierosnący ciąg (d_j), przy czym $d_j - c_j = \frac{d-c}{2^j}$. Ciągi te mają granice, bo są monotoniczne. Granice te są równe, bo $\lim\limits_{n\to\infty}(d_j - c_j) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^j} \cdot (d - c) = 0$. Ponieważ $c_j \le a_{n_j} \le d_j$ dla każdej liczby naturalnej j, więc – na mocy twierdzenia o trzech ciągach – ciąg (a_{n_j}) też ma tę samą granicę. Dowód został zakończony. ■

Wniosek z twierdzenia Bolzano – Weierstrassa

Ciąg ograniczony ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy granice wszystkich tych jego podciągów, które mają granice, są równe.

Dowód.

Udowodnimy teraz, że z ciągu (a_n), który nie ma granicy można wybrać dwa podciągi mające różne granice. Można zeń wybrać podciąg zbieżny do granicy g. Ponieważ g nie jest granicą ciągu (a_n), więc istnieje $\varepsilon > 0$, takie że poza przedziałem $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Wybieramy z tych właśnie wyrazów podciąg zbieżny. Ma on oczywiście granicę $\tilde{g} \ne g$, dokładniej $|\tilde{g} - g| \ge \varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

Następne twierdzenie, w zasadzie już częściowo udowodnione, wykazał A.Cauchy, jeden z twórców analizy matematycznej.

Twierdzenie

Ciąg (a_n) ma granicę skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek Cauchy'ego:

$$\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \text{ istnieje liczba naturalna } n_\varepsilon \text{ taka, że jeśli } k, l > n_\varepsilon, \text{ to } |a_k - a_l| < \varepsilon \qquad \text{(wC)}$$

Dowód.

Jeżeli ciąg ma granicę skończoną g i $\varepsilon > 0$, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jeśli więc liczby naturalne k i l są dostatecznie duże, to

$$|a_k - a_l| = |a_k - g + g - a_l| \le |a_k - g| + |g - a_l| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Wykazaliśmy więc, że z istnienia granicy skończonej wynika warunek Cauchy'ego. Załóżmy teraz, że ciąg spełnia warunek Cauchy'ego. Istnieje wtedy n_1 , takie że dla $k, l > n_1$ mamy $|a_k - a_l| < 1$. Przyjmując $l = n_1 + 1$ stwierdzamy, że $|a_k| - |a_l| \le |a_k - a_l| < 1$, zatem $|a_k| \le 1 + |a_l|$ dla wszystkich dostatecznie dużych k . Znaczy to, że ciąg (a_n) jest ograniczony. Wybierzmy z ciągu (a_n) podciąg zbieżny (a_{n_m}) . Niech g oznacza jego granicę. Wykażemy, że g jest granicą całego ciągu. Jeśli $\varepsilon > 0$, to dla dostatecznie dużych k, l, m zachodzą nierówności $|a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz $|a_{n_m} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ m, l są wybierane dowolnie, byle były dostatecznie duże, i $n_m \ge m$, więc można wybrać je tak, by $l = n_m$. Wtedy dla dostatecznie dużego k mamy $|a_k - g| \le |a_k - a_l| + |a_{n_m} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, co oznacza, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie to, podobnie jak twierdzenie o istnieniu granicy ciągu monotonicznego, pozwala czasem stwierdzić istnienie granicy bez ustalania jej wartości, co jest bardzo ważne w licznych przypadkach. Pozwala ono też wykazywać nieistnienie granic – w istocie rzeczy wykazując, że ciąg geometryczny o ilorazie $q \le -1$ nie ma granicy, wykazywaliśmy, że nie spełnia on warunku Cauchy'ego, rolę ε pełniła tam liczba 2 .

Oprócz granic skończonych warto rozpatrywać w licznych przypadkach granice nieskończone. Wprowadzimy dwa dodatkowe symbole $\pm\infty$. Zbiór złożony ze wszystkich liczb rzeczywistych i obu nieskończoności oznaczać będziemy przez $[-\infty, +\infty]$ lub przez $\overline{\mathbb{R}}$

Definicja granicy nieskończonej

a. $+\infty$ (czytaj: plus nieskończoność) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba całkowita n_M taka, że jeśli $n > n_M$, to $a_n > M.$

b. $-\infty$ (czytaj: minus nieskończoność) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba całkowita n_M taka, że jeśli $n > n_M$, to $a_n < M.$ ■

Z zasady Archimedesa wynika od razu, że $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

Ciąg geometryczny i granice

Jeśli $q > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, bowiem $q^n = [1 + (q-1)]^n \ge 1 + n(q-1) > M$ dla $n > \frac{M-1}{q-1}$. Jeśli $|q| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Dla $q = 0$ do dowodu nic nie ma. Jeśli $0 < |q| < 1$, to nierówność $|q|^n < \varepsilon$ jest równoważna nierówności $\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{|q|^n}$. Ta ostatnia nierówność wynika z nierówności $\frac{1}{\varepsilon} < 1 + n\big(\frac{1}{|q|} - 1\big)$, bo z nierówności Bernoulli'ego wynika, że $\frac{1}{|q|^n} \ge 1 + n\big(\frac{1}{|q|} - 1\big)$. Wobec tego dla $n > \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{\frac{1}{|q|}-1}$ zachodzi nierówność $|q|^n < \varepsilon$. Dla $q = 1$ ciąg q^n jest stały, więc zbieżny. Załóżmy, że $q \le -1$. Wtedy $q^{2n} \ge 1$ i $q^{2n+1} \le -1$, można zastosować łatwą indukcję. Wynika stąd, że różnica dwóch kolejnych wyrazów ma wartość bezwzględną nie mniejszą niż 2 , co oznacza, że ciąg nie spełnia warunku Cauchy'ego m.in. dla $\varepsilon = 2$, więc nie ma granicy skończonej. ∞ nie jest granicą tego ciągu, bo $q^{2n+1} \le -1$, więc nie jest prawdą jakoby dla dostatecznie dużych była spełniona nierówność $q^n > 0$. Również $-\infty$ nie jest granicą tego ciągu, bo nie jest prawdą, że $q^n \le -1$ dla dostatecznie dużych n , bowiem $q^{2m} \ge 1$. ■

Definicje działań z użyciem symboli nieskończonych

Wprowadziliśmy wcześniej symbole $+\infty$ oraz ∞. Nie są to liczby rzeczywiste, lecz nowe obiekty. Teraz *zdefiniujemy* działania z ich użyciem.

Definicja

$-(+\infty)=-\infty\,,\quad +(+\infty)=+\infty\,,\quad -(-\infty)=+\infty\,,\quad +(-\infty)=-\infty\,.$

$+\infty\pm a=\pm a+(+\infty)=+\infty\quad -\infty\pm a=\pm a+(-\infty)=-\infty$ dla każdej liczby rzeczywistej a.

$+\infty+(+\infty)=+\infty\,,\quad -\infty+(-\infty)=-\infty\,,\quad +\infty-(-\infty)=+\infty\,,\quad -\infty-(+\infty)=-\infty\,.$

$+\infty\cdot a=+\infty$ i $-\infty\cdot a=-\infty$ dla każdego $a>0\,.$

$(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty\,.$

$+\infty\cdot a=-\infty$ i $-\infty\cdot a=+\infty$ dla każdego $a<0\,.$

$\frac{a}{\pm\infty}=0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a.

$\frac{\pm\infty}{a}=\pm\infty\cdot\frac{1}{a}$ dla dowolnej liczby $a\neq 0\,.$

$a^{+\infty}=+\infty\,,\ a^{-\infty}=0$ dla dowolnej liczby $a>1\,.$

$a^{+\infty}=0$ i $a^{-\infty}=+\infty$ dla dowolnej liczby $0<a<1\,.$

$-\infty<a<+\infty$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $a\,.$

$-\infty<+\infty\,.$

$\ln(+\infty)=+\infty\,,\ \ln 0=-\infty\,.$ ■

Nie definiujemy symboli, których na te liście nie ma, np. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,,\ 0\cdot(\pm\infty)\,,\ 1^{\pm\infty}$ i innych. Przyczyny, dla których nie wprowadza się szerszej definicji staną się jasne niebawem – okaże się, że nie ma sesnsownej drogi wprowadzenia definicji tych *symboli nieoznaczonych*. Definicje te są wprowadzane po to, by można było sformułować twierdzenia o obliczaniu granic, które czytelnik znajdzie w następnym punkcie. Definicja logarytmów symboli nieskończonych nie jest powszechnie przyjęta, jest wygodna dopóki nie zajmujemy się liczbami zespolonymi, w przypadku liczb zespolonych może utrudniać życie studentom.

16. Obliczanie granic i stwierdzanie zbieżności ciągu – podstawowe twierdzenia

Sformułujemy teraz kilka twierdzeń uwzględniając koncepcję granicy nieskończonej, które ułatwiają obliczanie granic, ich szacowanie lub stwierdzanie ich istnienia. Dowody pozostawiamy studentom w charakterze prostego ćwiczenia, którego zrobienie może pomóc sprawdzić, czy pojęcie granicy zostało zrozumiane.

Twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy

A1. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\,,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n$ i określona jest ich suma, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n\,.$

A2. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\,,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n$ i określona jest ich różnica, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n\,.$

A3. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\,,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n$ i określony jest ich iloczyn, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n\,.$

A4. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\,,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n$ i określony jest ich iloraz, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$

i zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$. ■

Twierdzenia o nierównościach

N1. Jeśli $C < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $C < a_n$.

N2. Jeśli $C > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $C > a_n$.

N3. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $b_n < a_n$.

N4. Jeśli $b_n \le a_n$ dla dostatecznie dużych n , to zachodzi nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

N5. Jeśli $b_n \le a_n$ dla dostatecznie dużych n i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

N6. Jeśli $b_n \le a_n$ dla dostatecznie dużych n i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. ■

Definicje działań z użyciem symboli nieskończonych zostały w taki sposób sformułowane, by te twierdzenia były prawdziwe. Jeśli chcielibyśmy zdefiniować np. różnicę $\infty - \infty$, to byłyby kłopoty natury zasadniczej. Jeśli np. $a_n = n$ i $b_n = n$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $b_n = \infty$, więc powinno być $\infty - \infty = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$. Jeśli $a_n = n+13$, $b_n = n$, to powinno być $\infty - \infty = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 13$ i jasne, że zamiast 13 można wstawić dowolną liczbę rzeczywistą. Jeśli $a_n = 2n$ i $b_n = n$, to otrzymujemy $\infty - \infty = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Jeśli $a_n = n$ i $b_n = 2n$, to otrzymujemy $\infty - \infty = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$. Jeśli wreszcie $a_n = n + (-1)^n \ge n - 1$ i $b_n = n$, to otrzymamy $\infty - \infty = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, a więc tym razem różnica dwóch ciągów, których granicą jest ∞ granicy w ogóle nie ma. Studenci zastanowią się nad podobnymi przykładami w przypadku pozostałych symboli nieoznaczonych, np. $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ itd.

To w zasadzie wyczerpuje listę twierdzeń niezbędnych dla dalszego wykładu, ale ze względu na to, że wielu studentów zdążyło już poznać tzw. regułę de l'Hospitala podamy jeszcze jedno twierdzenie stanowiące jej odpowiednik dla przypadku ciągów. Twierdzenie to jest bardzo przydatne w wielu sytuacjach związanych z symbolami nieoznaczonymi typu $\frac{0}{0}$ oraz $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Twierdzenie Stolza

Załóżmy, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są różne od 0 i że jest on ściśle monotoniczny oraz że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$. Jeśli spełniony jest jeden z warunków:

(i) ciąg (b_n) ma granicę nieskończoną,

(ii) ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do 0 ,

to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ma granicę i zachodzi równość:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} . \boxtimes$$

Dowód.

Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że ciąg (b_n) jest ściśle rosnący – w razie potrzeby zastępujemy go ciągiem $(-b_n)$. Niech m, M będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $m < g < M$, jeśli $g = -\infty$, to rozważamy jedynie M , jeśli $g = +\infty$, to rozważamy jedynie m .

Niech m', M' będą liczbami rzeczywistymi, takimi że $m < m' < g < M' < M$. Ponieważ granicą ciągu $\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right)$ jest g , więc istnieje liczba naturalna n_0 , taka że dla $n > n_0$ zachodzi nierówność:

$m' < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < M'$ a po jej pomnożeniu przez liczbę dodatnią $b_{n+1}-b_n$ otrzymujemy nierówność:

$$m'(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < M'(b_{n+1}-b_n) \tag{$N_{n,n+1}$}$$

Dodając stronami nierówności $(N_{n,n+1})$, $(N_{n+1,n+2})$, ..., $(N_{n+k-1,n+k})$ otrzymujemy

$$m'(b_{n+k}-b_n) < a_{n+k}-a_n < M'(b_{n+k}-b_n) \tag{$N_{n,n+k}$}$$

Skorzystawszy z założenia (ii) stwierdzamy, że wyrazy ciągu (b_n), rosnącego i zbieżnego do 0, są ujemne, więc

$$-mb_n < -m'b_n = \lim_{k\to\infty} m'(b_{n+k}-b_n) \le -a_n = \lim_{k\to\infty}(a_{n+k}-a_n) \le$$
$$\le \lim_{k\to\infty} M'(b_{n+k}-b_n) = -M'b_n < -Mb_n$$

a zatem, po podzieleniu stronami przez $-b_n > 0$, otrzymujemy $m < \frac{a_n}{b_n} < M$. Liczby m, M były wybrane dowolnie, stwierdzamy więc, że zachodzi równość $g = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, co kończy dowód w przypadku (ii).

Skorzystawszy z założenia (i) stwierdzamy, że od pewnego miejsca wyrazy ciągu rosnącego (b_n), którego granica jest nieskończona, są dodatnie. Zwiększając w razie potrzeby n_0 możemy przyjąć, że ma to miejsce dla $n > n_0$ i tylko takie numery wyrazów ciągu będziemy rozpatrywać dalej. Podzielimy nierówność $(N_{n,n+k})$ przez b_{n+k}. Otrzymujemy

$$m'\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right) < \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} - \frac{a_n}{b_{n+k}} < M'\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right),$$

a stąd

$$m'\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right) + \frac{a_n}{b_{n+k}} < \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} < M'\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right) + \frac{a_n}{b_{n+k}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{k\to\infty}\left[m'\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right)+\frac{a_n}{b_{n+k}}\right] = m' > m, \text{ oraz } \lim_{k\to\infty}\left[M'\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right)+\frac{a_n}{b_{n+k}}\right] = M' < M,$$

więc istnieje k_n takie, że jeśli $k > k_n$, to zachodzą nierówności

$$m'\left(1-\tfrac{b_n}{b_{n+k}}\right)+\tfrac{a_n}{b_{n+k}} > m \text{ oraz } M'\left(1-\tfrac{b_n}{b_{n+k}}\right)+\tfrac{a_n}{b_{n+k}} < M,$$

a wobec tego $m < \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} < M$ dla $n > n_0$ i $k > k_n$, a stąd już od razu wynika, że $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{a_m}{b_m} = g$, co kończy dowód twierdzenia w przypadku (i). ■

Przykład

Niech $a > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$. Pokażemy dwie metody. Zaczniemy od sposobu z mniejszą liczbą rachunków, czyli „bardziej teoretycznego”.

Załóżmy, że $a > 1$. Ciąg $(\sqrt[n]{a})$ jest w tym przypadku ściśle malejący, jego wyrazy są większe niż 1, więc ma granicę g, *skończoną*, która nie może być mniejsza niż 1. Każdy podciąg tego ciągu jest zbieżny do g. Między innymi $g = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a}$. Skorzystamy teraz z twierdzenia o iloczynie granic: $g^2 = g\cdot g = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[2n]{a})^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = g$, zatem $g^2 = g$. Stąd wynika, że $g = 0 < 1$ lub $g = 1$ (już wiemy, że g nie jest równe $\pm\infty$). Ponieważ pierwsza możliwość została wcześniej wykluczona, więc zostaje druga, czyli $g=1$.

Dla $a=1$ teza jest prawdziwa w oczywisty sposób. Załóżmy teraz, że $0<a<1$. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/a}}=\frac{1}{1}=1$ – skorzystaliśmy z twierdzenia o ilorazie granic oraz z już udowodnionej części tezy.

Teraz udowodnimy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ w przypadku $a>1$, za pomocą szacowań. Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Chcemy wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$, czyli że $1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$. Ponieważ $a>1$, więc nierówność podwójna sprowadza się do nierówności $\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$, czyli do nierówności $a<(1+\varepsilon)^n$. Ta z kolei wynika z nierówności $a<1+n\varepsilon$, bo $1+n\varepsilon<(1+\varepsilon)^n$ – nierówność Bernoulli'ego. Wystarczy więc, by $n_\varepsilon>\frac{a-1}{\varepsilon}$. To kończy dowód. ■

Uwaga: nie rozwiązywaliśmy nierówności $\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$*, bo wymagałoby to użycia logarytmów,* $n>\frac{\log a}{\log(1+\varepsilon)}$*, wskazaliśmy jedynie moment, od którego nierówność jest prawdziwa, nie troszcząc się o to, co się dzieje w przypadku wcześniejszych* n*. Mogliśmy użyć logarytm i powołać się na własności funkcji wykładniczej:* $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}=e^{(\ln a)/n}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^0=1$.

Przykład

Teraz wykażemy, że granicą ciągu $(\sqrt[n]{n})$ jest liczba 1. Zacznijmy od wypisania kilku pierwszych wyrazów ciągu: $\sqrt[1]{1}=1$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}, \ldots$. Bez trudu można stwierdzić, że $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$ – można np. podnieść tę nierówność obustronnie do potęgi 6. Oznacza to, że $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}$. Wynika stąd, że ciąg ten nie jest malejący ani rosnący. Nie wyklucza to monotoniczności *od pewnego miejsca.* Udowodnimy więc , że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ korzystając z definicji granicy ciągu, inny sposób pokażemy później.

Niech ε będzie dodatnią liczbą dodatnią. Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu są większe lub równe od 1, więc wystarczy wykazać, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$, czyli $n<(1+\varepsilon)^n$. Tym razem nierówność Bernoulli' ego jest niewystarczająca, ale ponieważ $\varepsilon>0$, więc dla $n\geq 2$ mamy $(1+\varepsilon)^n\geq 1+\binom{n}{1}\varepsilon+\binom{n}{2}\varepsilon^2>\binom{n}{2}\varepsilon^2$. Wystarczy więc, żeby $n<\binom{n}{2}\varepsilon^2=\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$, czyli $\frac{2}{\varepsilon^2}+1<n$, co kończy dowód.

Teraz pokażemy jak można uzyskać ten wynik bez szacowań. Podnosimy stronami nierówność $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$ do potęgi $n(n+1)$. Otrzymujemy $(n+1)^n<n^{n+1}$. Dzieląc stronami przez n^n otrzymujemy $n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Otóż wcześniej wykazaliśmy (zob. punkt 13.), że ciąg $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ jest ograniczony. Wobec tego nierówność $n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zachodzi dla wszystkich *dostatecznie dużych* liczb naturalnych n – nie mamy powodu ustalać w tej chwili, od którego momentu jest ona prawdziwa. Wobec tego ciąg $(\sqrt[n]{n})$ jest malejący od pewnego momentu, jest też ograniczony z dołu przez liczbę 1, a co zatem idzie zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez g. Każdy podciąg tego ciągu, np. $\sqrt[2n]{2n}$ jest zbieżny do tej samej granicy g. Wobec tego $g^2=g\cdot g=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\right)=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}=1\cdot g$. Otrzymaliśmy równość $g^2=g$ a ponieważ $1\leq g<+\infty$, więc $g=1$, co kończy dowód. Okazało się, że również w tym przypadku można ominąć rachunki, wymagało to tylko nieco więcej zachodu niż poprzednio, bo ciąg nie jest monotoniczny, a tylko malejący od pewnego momentu. ■

Uwaga: Można stosować logarytm. Wtedy $\sqrt[n]{n} = e^{(\ln n)/n}$, *więc wystarczyłoby wykazać, że* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. *Można to zrobić korzystając z twierdzenia Stolza, a można też tak:* $0 \le \frac{\ln n}{n} = \frac{2\ln\sqrt{n}}{n} \le \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n} = 2\left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)$. *Teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach.*